Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич

ГЕОМЕТРИЯ

задачник

10 класс

Задачник для классов
с углубленным и профильным
изучением математики

Под научной редакцией
А. Р. Рязановского

Допущено Министерством
образования Российской
Федерации

2-е издание, стереотипное

дрофа

Москва · 2004

УДК 373.167.1:514(076.1)
ББК 22.151я721
П29

Потоскуев Е. В.

П29 Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. — 2-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2004. — 256 с.: ил.

ISBN 5—7107—8187—8

Задачник составляет комплект с учебником по геометрии тех же авторов. Однако он может быть использован и учащимися, занимающимися по другим учебникам, которые интересуются математикой, студентами педагогических вузов и репетиторами, занимающимися с абитуриентами, поступающими на факультеты, требующие повышенного уровня математической подготовки.

Содержание задачника, насчитывающего более 1000 задач, соответствует идеям дифференциации обучения: специальными значками отмечены необходимые для усвоения материалы и трудные задачи.

УДК 373.167.1:514(076.1)
ББК 22.151я721

ISBN 5—7107—8187—8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Новый учебный комплект по стереометрии для 10 класса с углубленным изучением математики состоит из трех частей: учебника по стереометрии для 10 класса, задачника по стереометрии и книги для учителя.

Настоящая книга представляет собой задачник по стереометрии для 10 классов с углубленным изучением математики.

Учебный комплект соответствует программе курса геометрии классов с углубленным изучением математики. Изучение материала рассчитано на 3 часа в неделю (хотя гораздо лучше было бы иметь 4 часа в неделю). Примерное планирование учебного материала приведено в конце учебника.

В задачнике имеется более 1000 задач, соответствующих теоретическому материалу, изложенному в учебнике.

Помимо этого в задачнике имеется:

• Дополнение, посвященное планиметрии, которое содержит перечень важных теорем планиметрии и более 150 планиметрических задач разной степени сложности на построение, вычисление и на доказательство. Оно предназначено для повторения планиметрии и решения задач, как учебного содержания, так и задач вступительных экзаменов в вузы.

• Список основных теорем курса стереометрии 10 класса, в котором отражается структура логически последовательного построения нашего курса. Список будет также полезен при оформлении письменного решения задач на контрольных работах, при ответах на уроке и решении задач домашнего задания.

• Список задач на построение в пространстве, в котором содержатся опорные задачи, лежащие в основе решения большинства стереометрических задач курса.

• Метрические формулы планиметрии и стереометрии; они в определенной мере заменят справочный материал.

Активное и эффективное изучение стереометрии возможно лишь при условии решения достаточно большого числа задач различной степени сложности. Поэтому в задачнике изложению теоретического материала каждого параграфа учебного пособия соответствует определенный подбор задач. Задачи по той или иной теме систематизированы по принципу: от простого — к сложному.

Авторы, разумеется, не считают, что каждый должен решить все задачи или, наоборот, ограничиться решением задач только данного учебника — существует много замечательных задачников по стереометрии. В нашей книге в основном помещены наиболее типичные «учебные» задачи, как легкие, так и посложнее, в том числе и задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы.

В связи с большим количеством задач мы отметили специальным значком ☺ те задачи, которые наиболее необходимы для решения в классе и дома, трудные задачи отмечены значком ♉. Этот значок присутствует среди задач, соответствующих каждому из параграфов. В задачах, относящихся к главе в целом, мы такого ранжирования не делали, так как считаем, что учитель сам выберет понравившиеся ему задачи. К абсолютному большинству задач даны ответы, а к некоторым задачам — краткие указания. Для ряда стереометрических задач в тексте приводятся подробные решения.

Задачник может быть полезен и отдельно от учебного пособия для всех изучающих или повторяющих курс стереометрии. Его можно использовать на факультативах и спецкурсах, он пригодится и для подготовки в вузы.

Авторы выражают благодарность рецензентам учебника доктору педагогических наук, профессору Ирине Михайловне Смирновой, заслуженному учителю России, кандидату педагогических наук учителю школы 420 г. Москвы Борису Петровичу Пигареву, учителю школы 1741 г. Москвы Илье Евгеньевичу Феоктистову. Авторы отмечают неоценимую помощь в подготовке рукописи к печати учителя математики Тамары Николаевны Потоскуевой.

Авторы будут благодарны за все замечания, присланные по адресу: 121096, Москва, а/я 534, Звавичу Л. И. или 445030 г. Тольятти, Потоскуеву Е. В. до востребования.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Геометрические фигуры

$A, B, C, \ldots, M, P, Q$ — точки;

$a, b, c, \ldots, m, p, q$ — прямые;

AB — прямая, проходящая через точки A и B;

α, β, γ — плоскости;

(ABC) — плоскость, проходящая через точки A, B и C (т. е. плоскость ABC);

(a, A) — плоскость, проходящая через прямую a и точку A;

$A(BC)D$ — двугранный угол с ребром BC и гранями ABC и DBC;

$\alpha a \beta$ — двугранный угол с ребром a и гранями α и β;

$\angle(a, b)$ — угол между прямыми a и b;

$\angle(a, \alpha)$ — угол между прямой a и плоскостью α;

$\angle(\alpha, \beta)$ — угол между плоскостями α и β.

Отношения между геометрическими фигурами

$=$ — равенство;

$\backsim$ — подобие;

$\parallel$ — параллельность;

$\perp$ — перпендикулярность;

$\in$ — принадлежность элемента множеству;

$\subset$ — включение одного множества в другое;

$\cap$ — пересечение множеств;

$\cup$ — объединение множеств.

Например:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$;

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ — треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$;

$a \parallel \alpha$ — прямая a параллельна плоскости α;

$a \perp \alpha$ — прямая a перпендикулярна плоскости α;

$A \in \alpha$ — точка A принадлежит плоскости α или плоскость α проходит через точку A_1;

$a \subset \alpha$ — прямая a лежит в плоскости α или плоскость α проходит через прямую a;

$A \notin \alpha$ — точка A не принадлежит плоскости α или плоскость α не проходит через точку A;

$a \not\subset \alpha$ — прямая a не лежит в плоскости α или плоскость α не проходит через прямую a;

$a \cap \alpha = A$ — прямая a пересекает плоскость α в точке A или плоскость α пересекает прямую a в точке A.

Величины

AB, $|AB|$, $\rho(A; B)$ — длина отрезка AB или расстояние между точками A и B;

$\rho(\Phi_1; \Phi_2)$ — расстояние между фигурами Φ_1 и Φ_2;

$\widehat{A(BC)D}$ — величина двугранного угла;

$\widehat{(a; b)}$ — величина угла между прямыми a и b;

$\widehat{(a; \alpha)}$ — величина угла между прямой a и плоскостью α;

$\widehat{(\alpha; \beta)}$ — величина угла между плоскостями α и β.

Прочие символы

$\Rightarrow$ — знак следования; заменяет слова «следовательно», «поэтому» и т. п.;

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности; заменяет слова «тогда и только тогда», «равносильно» и т. п.

---

[1] Мы не будем в дальнейшем различать высказывания «точка принадлежит плоскости (прямой)» и «точка лежит в (на) плоскости (прямой)», хотя второе высказывание является более «разговорным».

Глава

1 ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

Задачи к § 1—3

1.001. Укажите среди перечисленных фигур плоские и неплоские фигуры: а) треугольник; б) ромб; в) окружность; г) параллелепипед; д) куб; е) пирамида; ж) сфера; з) ломаная $ABCEH$, вершины A и H которой не принадлежат плоскости BCE; и) фигура, состоящая из ребер PA, PB и PC треугольной пирамиды $PABC$.

1.002. Назовите некоторые понятия геометрии, которым даются определения: а) в планиметрии; б) в стереометрии.

1.003. Какие основные понятия геометрии используются при определении: а) отрезка; б) окружности; в) треугольника; г) пирамиды?

1.004. ☺ Центр O данной окружности и две ее точки A и B принадлежат плоскости α. Всякая ли точка этой окружности принадлежит плоскости α? Ответ обоснуйте.

1.005. ☺ Запишите символически и сделайте рисунки: а) плоскость α проходит через точки A и C; б) плоскость α проходит через прямую p; в) прямая $p = AB$ пересекает плоскость α в точке M; г) плоскости α и β пересекаются по прямой c.

1.006. Прочитайте символическую запись, выполните рисунок и докажите: $(\alpha \cap \beta = a, P \in a, Q \notin \beta) \Rightarrow PQ \not\subset \beta$.

1.007. Постройте (с обоснованием) прямую, лежащую в данной плоскости.

1.008. Постройте (с обоснованием): а) прямую, пересекающую данную плоскость; б) плоскость, пересекающую данную плоскость; в) плоскость, пересекающую данную прямую.

1.009. Две плоскости имеют две общие точки. Какая фигура является их пересечением? Ответ обоснуйте.

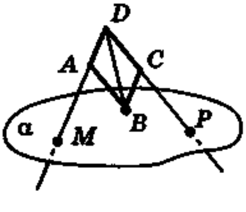


Рис. 1

1.010. ☺ Вершина B параллелограмма $ABCD$ принадлежит плоскости α. Прямая AD пересекает плоскость α в точке M, а прямая CD — в точке P (рис. 1). Верно ли выполнен рисунок? Ответ обоснуйте.

1.011. Нарисуйте четыре различные точки: а) принадлежащие одной плоскости; б) не принадлежащие одной плоскости.

1.012. Можно ли провести плоскость через четыре произвольные точки пространства? Ответ обоснуйте.

1.013. ☺ Точки A, B, C и D не принадлежат одной плоскости. а) Могут ли какие-то три из них принадлежать одной прямой? б) Могут ли прямые AC и BD пересекаться? Ответ обоснуйте.

1.014. Каждые четыре точки некоторой фигуры $Ф$ принадлежат одной плоскости. Докажите, что эта фигура является плоской.

1.015. Даны прямая a и точка B, не принадлежащая прямой a. Докажите, что все прямые, проходящие через точку B и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

1.016. ☺ Прямые a и b пересекаются в точке C. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку C и пересекающие данные прямые, лежат в одной плоскости. Лежат ли в одной плоскости все прямые, проходящие через точку C?

1.017. Лежат ли в одной плоскости прямые a, b и c, если любые две из них пересекаются, но не существует точки, принадлежащей всем трём прямым? Выполните рисунок.

1.018. Каждые две из трех прямых a, b и c пересекаются, но не существует плоскости, содержащей все три прямые. Каким образом расположены данные прямые? Выполните рисунок.

1.019. ☺ Через точку пересечения прямых AB и AC проведена прямая m, не лежащая с ними в одной плоскости. Докажите, что прямые m и BC не пересекаются.

1.020. Прямые a, b и c, лежащие в одной плоскости, пересекаются в точке O. Докажите, что существует плоскость, не проходящая через точку O, которая пересекает три данные прямые a, b и c.

1.021. Прямые a, b и c проходят через точку M. Плоскость, не проходящая через точку M, пересекает прямые a, b и c в точках, не принадлежащих одной прямой. Докажите, что прямые a, b и c не лежат в одной плоскости.

1.022. ☺ Прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке C, не принадлежащей прямой a. Докажите, что прямые a и b не пересекаются.

1.023. Прямые p и q не лежат в одной плоскости. На прямой c, пересекающей прямые p и q в точках P и Q соответственно, отмечена точка A, отличная от P и Q. Можно ли через точку A провести еще одну прямую, отличную от c и пересекающую p и q?

1.024. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Прямые m и n пересекают каждую из прямых a и b в попарно различных точках. Верно ли, что прямые m и n не пересекаются?

1.025. Точки H, E, F, K — середины ребер соответственно PC, AC, AB, PB тетраэдра $PABC$. Можно ли провести плоскость через прямые: а) PC и HF; б) PC и KE; в) PC и EF; г) HE и KF; д) EF и KH; е) HF и KE?

1.026. ♉ Дана плоскость α и три прямые AB, BC и AC, пересекающие ее соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат одной прямой.

1.027. ☺ Точка M лежит вне плоскости, проходящей через точки A, B и C. Может ли четырехугольник $ABCM$ быть трапецией? Ответ обоснуйте.

1.028. (*Устно.*) Справедливо ли утверждение: если вершины треугольника лежат в одном полупространстве относительно данной плоскости, то он весь лежит в этом полупространстве? Верным ли будет это утверждение, если вместо вершин треугольника взять середины всех трех его сторон? Ответ обоснуйте.

1.029. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. В плоскости α дана точка A, а в плоскости β — такие точки B и C, что прямые BC и a пересекаются. Постройте прямые пересечения плоскости, проходящей через точки A, B и C, с плоскостями α и β.

1.030. ☺ Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Через точку A прямой a проведена плоскость γ, не содержащая прямую a. Докажите, что плоскость γ пересекает плоскости α и β по двум различным прямым.

1.031. Плоский четырехугольник $ABCD$ и треугольник AMD не лежат в одной плоскости. По какой прямой пересекаются плоскости: а) ABM и AMD; б) ABC и CDM; в) ABD и ACM; г) ABC и BMD?

1.032. Две различные плоскости ABC и ABD проходят через точку M. При этом $AM = 5$, $BM = 9$. Найдите длину отрезка AB.

1.033. Начертите тетраэдр $PABC$ и выберите произвольные точки $M \in AB$, $K \in AP$. Постройте прямые пересечения плоскостей: а) ABP и CMK; б) CMK и ABC; в) CMK и APC. Какая фигура получилась в сечении данного тетраэдра плоскостью CMK?

1.034. Плоскость α проходит через вершину P тетраэдра $PABC$ и точки $M \in AB$ и $K \in BC$. Начертите сечение тетраэдра плоскостью α. Плоскость β пересекает ребра PA, PB и PC соответственно в точках D, E и F. Начертите сечение тетраэдра плоскостью β и укажите отрезок прямой пересечения плоскостей α и β, лежащий внутри тетраэдра.

1.035. ☺ Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости: а) AA_1B_1 и AA_1D_1; б) AA_1C и BCC_1; в) AB_1C_1 и AA_1B; г) ACD_1 и CDD_1; д) A_1BC и ACD.

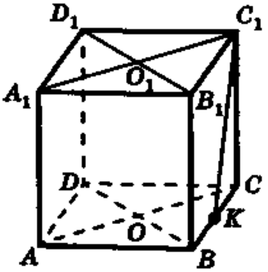


Рис. 2

1.036. (*Устно.*) На рисунке 2 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; K — середина отрезка BC, $O = AC \cap BD$, $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$. Постройте отрезки, по которым плоскость A_1BC_1 пересекает грани ABB_1A_1, $A_1B_1C_1D_1$ и BCC_1B_1 данного куба. Выясните, лежит ли: а) прямая BO_1 в плоскости A_1BC_1; б) прямая B_1O в плоскости BDD_1; в плоскости A_1BC_1; в) прямая A_1O в плоскости ACC_1; в плоскости BDC_1. Пересекает ли прямая C_1K прямые: а) AB; б) BB_1; в) AC?

1.037. ☺ Начертите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и выберите две произвольные точки M и K внутри грани $ABCD$. Постройте: а) прямую пересечения плоскости A_1MK и плоскости грани $ABCD$ куба; б) точки пересечения плоскости A_1MK с прямыми, содержащими ребра AD, BC и DD_1 куба; в) отрезки прямых, по которым плоскость A_1MK пересекает грани ABB_1A_1, ADD_1A_1 и $A_1B_1C_1D_1$ куба.

1.038. Через концы трех ребер куба, исходящих из одной вершины, проведена плоскость. Постройте линии пересечения этой плоскости с гранями куба. Найдите периметр и площадь фигуры, образованной полученными линиями, если ребро куба равно 1.

1.039. Постройте линии пересечения куба и плоскости, проходящей через середины трех его ребер, исходящих из одной вершины. Найдите периметр и площадь фигуры, получившейся при этом пересечении, если ребро куба равно 2.

1.040. ♉ Дан правильный тетраэдр $EFGS$, у которого $EF = 12$. Точки L и N лежат на ребрах SG и SE соответственно, причем $SL = 3$, $SN = 3$. Точка T — середина ребра SF. Найдите: а) точку Y_1 пересечения прямой TL и плоскости EFG; б) точку Y_2 пересечения прямой TN и плоскости EFG; в) длину отрезка Y_1Y_2; г) точку пересечения прямой TN и плоскости ELF; д) прямую пересечения плоскостей LY_1Y_2 и NFE; е) отношение, в котором плоскость LY_1Y_2 делит отрезок SE, считая от точки S.

Задачи к § 4

1.041. На рисунке изобразите четыре прямые так, что они не лежат в одной плоскости, а любые две из них пересекаются.

1.042. ☺ Четыре прямые проходят через одну и ту же точку, но ни какие три из них не лежат в одной плоскости. Сколько существует плоскостей, каждая из которых содержит какие-либо две из данных прямых? Выполните рисунок.

1.043. Как могут быть расположены прямые a, b, c и d, если известно, что все они не лежат в одной плоскости, а через любые две из них можно провести плоскость? Выполните рисунок.

1.044. (*Устно.*) ☺ Нарисуйте два треугольника ABC и ABH, не лежащие в одной плоскости. Возьмите на отрезках AC и BC соответственно точки K и H. Пусть L — точка пересечения прямых KH и AB. Найдите точку пересечения прямой KH и плоскости ABH. Ответ обоснуйте. Будет ли прямая KH пересекать плоскость ABH, если точки K и H — середины отрезков AC и BC? Ответ обоснуйте.

1.045. Фигура состоит из треугольников ABC и ACH, не лежащих в одной плоскости. Постройте сечение этой фигуры плоскостью, которая проходит через: а) точки M, O и P — середины отрезков соответственно AH, CH и AB; б) точку B, точки K и O — середины отрезков AC и CH.

1.046. Дан правильный тетраэдр $PABC$; M — центроид (точка пересечения медиан треугольника) грани ABC; K и L — середины ребер соответственно BC и AC. Начертите сечения тетраэдра плоскостями AKP, PMC и BPL. Начертите общий отрезок (если он существует), принадлежащий всем трем сечениям.

1.047. Основание четырехугольной пирамиды $PABCD$ — четырехугольник $ABCD$, не являющийся трапецией. 1) Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости: а) PAC и PBD; б) PBM и PCH, где M и H — середины ребер соответственно PC и PA. 2) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AB и точку K — середину ребра PD.

1.048. ☺ Пусть $PABC$ — тетраэдр. Начертите его сечение плоскостью $\alpha = (MEK)$, если: а) точки M, K и E принадлежат ребрам соответственно PA, PB и AC так, что $AM : MP = 3 : 1$, $BK : KP = 1 : 2$, $AE : EC = 1 : 1$; б) точки M и E лежат на медианах PH и CF треугольников соответственно PAB и PBC, а точка K — середина ребра PC.

1.049. ☺ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Начертите его сечение плоскостью $\alpha = (PMK)$, если: а) точки P, M и K принадлежат соответственно ребрам BB_1, CC_1 и DD_1 так, что $BP : PB_1 = 1 : 3$, $CM : MC_1 = 3 : 1$, $DK : KD_1 = 3 : 2$; б) точки M, P и K — середины ребер соответственно AB, BC и DD_1.

1.050. ☺ Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки P, M и K, если: а) точки P и M лежат внутри квадрата $ABCD$, точка K — середина ребра AA_1; б) точки P, M и K — середины ребер соответственно A_1B_1, B_1C_1 и CC_1.

1.051. ☺ На рисунке 3 изображены три попарно пересекающиеся прямые, которые пересекают плоскость α. Верно ли сделан рисунок?

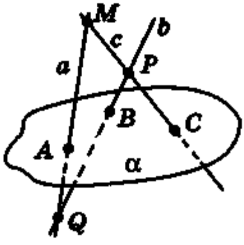


Рис. 3

1.052. ♉ Вершина A ромба $ABCD$ со стороной a принадлежит плоскости α, а остальные его вершины лежат в одном полупространстве относительно плоскости α. Известно, что прямая BD пересекает плоскость α в точке K. а) Постройте точки P и Q пересечения плоскости α с прямыми BC и CD. б) Найдите отношение $PA : AQ$, если $BD : DK = 3 : 1$.

1.053. ☺ Определите вид треугольника DEF, если: а) через прямую, содержащую сторону FD, и точку пересечения высот треугольника можно провести, по крайней мере, две различные плоскости; б) через медиану DK и центр вписанной в треугольник окружности можно провести, по крайней мере, две различные плоскости; в) существует прямая, не лежащая в плоскости DEF, но пересекающая биссектрису DK и содержащая центр окружности, описанной вокруг треугольника KDF.

1.054. Докажите, что через точку пересечения диагоналей трапеции и середины ее оснований можно провести более чем одну плоскость.

1.055. Диагональ AC четырехугольника $ABCD$ делит его на правильный треугольник ACD со стороной 10 и прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и катетом AB, равным 5. Этот четырехугольник перегнули по диагонали AC так, что точка B не лежит в плоскости ACD. На прямой AC взяли точку M так, что сумма длин отрезков BM и MD — наименьшая. Найдите значение этой суммы.

1.056. Точка B не принадлежит плоскости правильного треугольника ACD со стороной 10. Длина отрезка AB равна 5, угол ABC — прямой. Точка M принадлежит прямой AC. Найдите наименьшее значение длины ломаной BMD.

1.057. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой имеют длину a. Точка M — середина A_1B_1; точка P — середина BC. Постройте сечение призмы плоскостью AMP, определите его вид и длины всех его сторон.

1.058. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром a. Точка P — середина A_1B_1; точка K — середина CC_1; точка D — середина AM. Постройте сечение куба плоскостью PMK и найдите его сторону на грани $A_1B_1C_1D_1$.

1.059. $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. MO — ее высота; $AB = MO = a$; точка P — середина MC. Точка K лежит на отрезке MO так, что $MK = \frac{2a}{3}$. Постройте сечение пирамиды плоскостью KPD, определите его вид и найдите его сторону на грани CMB.

1.060. ♉ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром a. O — точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$; точка K — середина DC; точка M лежит на луче BB_1, $B_1M = 2a$. Постройте сечение куба плоскостью OKM и определите его вид.

1.061. ☺ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 точка K принадлежит ребру BB_1 и $BK : KB_1 = 5 : 1$, точка P принадлежит ребру DD_1 и $DP : PD_1 = 1 : 5$. Найдите расстояние от вершины C до общей точки трех плоскостей A_1KP, ABD и KPC_1.

1.062. В правильном тетраэдре $MABC$ с ребром 4 точки T и N принадлежат ребру AM, точка P — середина ребра MB, точка K принадлежит ребру MC и $MK = 3KC$. Найдите расстояние от общей точки плоскостей MAB, NKP и TPK до прямой AB.

1.063. ♉ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 4 точка M принадлежит ребру AA_1 и $AM = 3$, точка P принадлежит ребру CC_1 и $PC_1 = 1$, точка K делит ребро DD_1 в отношении $1 : 3$, считая от D. Найдите расстояния от вершины B до прямой пересечения плоскостей KMP и ADC.

1.064. Ребро правильного тетраэдра $MABC$ равно 18. Точки P и K являются соответственно серединами ребер AM и BM, а точка T делит ребро MC в отношении $MT : TC = 4 : 1$. Найдите расстояние от вершин A, B и C до общей прямой плоскостей TPK и ABC.

Графическая работа № 1 ☺

Тема: «Следствия из аксиом стереометрии»

Сделайте чертежи по условиям задач, используя данные в них обозначения.

1. Прямая MP лежит в плоскости α.
2. Прямая AB пересекает плоскость α в точке M.
3. Плоскость α проходит через прямую a и точку M, не принадлежащую прямой a, и пересекает прямую b в точке M.
4. Прямые MC и MB пересекают плоскость β в одной и той же точке.
5. Прямые MC и MB пересекают плоскость γ в разных точках.
6. Прямые a и b, изображенные на рисунке параллельными, на самом деле не параллельны.
7. Прямые a и b, изображенные на рисунке пересекающимися, на самом деле не имеют общих точек.
8. Плоскости α и β имеют общую прямую a и пересекают прямую KM соответственно в точках K и M.
9. Плоскости α и β пересекаются по прямой c, а плоскости α и γ также пересекаются по этой же прямой c.
10. Плоскости α и β пересекаются по прямой MP, а плоскости α и γ пересекаются по другой прямой — прямой MT.
11. Прямые a, b и c имеют общую точку O и лежат в одной плоскости.
12. Прямые a, b и c имеют общую точку O, но не существует плоскости, в которой лежат все эти три прямые.
13. Плоскости α, β и γ имеют единственную принадлежащую всем трем плоскостям точку O.
14. Прямые AB и MT таковы, что точка A не принадлежит плоскости BMT, а точка B не принадлежит прямой MT.
15. На прямой a, пересекающей плоскость α в точке A, выбраны по разные стороны от A точки M и T. Прямые MM_1 и

TT_1 параллельны между собой и пересекают плоскость α соответственно в точках M_1 и T_1.

16. Две вершины треугольника ABC лежат в плоскости α, а вершина C не лежит в α. Прямая d пересекает стороны CB и CA соответственно в точках M и T, а плоскость α в точке K.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1

1.065. На рисунках 4—18 показаны точки M, P и R. Постройте сечение этого куба плоскостью MPR в каждом из заданных расположений точек M, P и R.

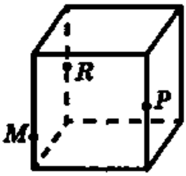


Рис. 4

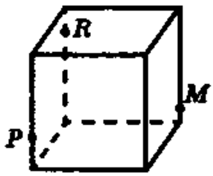


Рис. 5

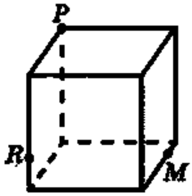


Рис. 6

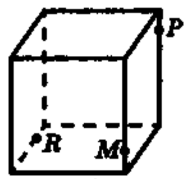


Рис. 7

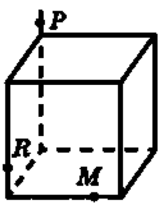


Рис. 8

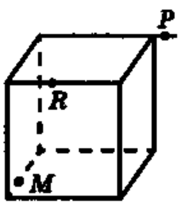


Рис. 9

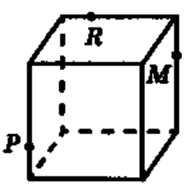


Рис. 10

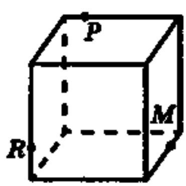


Рис. 11

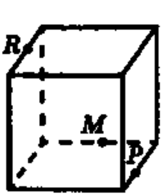
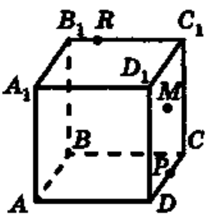
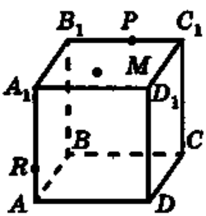


Рис. 12



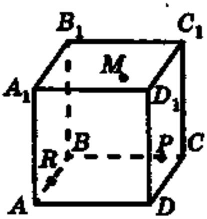
$M \in (BB_1C_1)$

Рис. 13



$M \in (A_1B_1C_1)$

Рис. 14



$M \in (A_1B_1C_1)$

Рис. 15

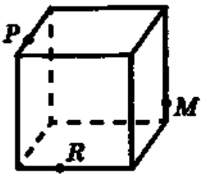
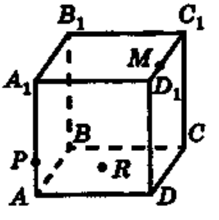
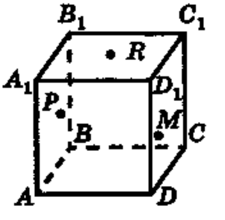


Рис. 16



$R \in (ABC)$

Рис. 17



$P \in (AA_1B_1)$
$R \in (A_1B_1C_1)$
$M \in (DD_1C_1)$

Рис. 18

1.066. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 1. Точка Q — центр грани $ABCD$, точка M — центр грани BCC_1B_1, точка P — центр грани ABB_1A_1, точка K — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Найдите длины отрезков: а) MQ; б) MP; в) BK; г) AC_1; д) MA_1.

1.067. В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром 1 точки H, R и M — центры его граней соответственно ABC, PAC и PBC; точки D и F — середины ребер соответственно PB и BC. Найдите длины отрезков: а) PH; б) RH; в) AM; г) RM; д) DF.

1.068. $PABC$ — правильный тетраэдр. Все ребра имеют длину 8; M — середина AP; K — середина BP; E лежит на ребре PC; $PE = 6$. Найдите: а) точку X_1 пересечения прямой ME и плоскости ABC; б) точку X_2 пересечения прямой KE и плоскости ABC; в) длину отрезка X_1X_2; г) точку пересечения прямой ME и плоскости AKC; д) прямую пересечения плоскостей MX_1K и X_2PC; е) в каком отношении плоскость MX_1X_2 делит отрезок PB (считая от точки B).

1.069. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 8; M — середина AA_1, N лежит на ребре DD_1; $D_1N = 6$. Найдите: а) точку X_1 пересечения MN и плоскости ABC; б) точку X_2 пересечения MN и плоскости $A_1B_1C_1$; в) длину X_1X_2; г) точку X_3 пересечения BX_1 и плоскости DD_1C; д) в каком отношении точка X_3 делит отрезок DC (считая от D); е) общую прямую плоскостей $X_1X_2X_3$ и AA_1B.

1.070. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой имеют длину a. Точка C — середина отрезка C_1P, K — точка пересечения диагоналей грани AA_1C_1C, M — точка пересечения диагоналей грани BB_1C_1C. Постройте сечение призмы плоскостью PKM и определите длины его сторон, лежащие в плоскостях ABC и $A_1B_1C_1$.

1.071. ♉ $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. O — точка пересечения диагоналей $ABCD$. $MO = AB = a$. Точка O — середина отрезка MP; точка K — середина MD; точка T принадлежит лучу BC, $CT = \frac{a}{3}$, и C лежит между B и T. Постройте сечение пирамиды плоскостью PKT, определите его вид и найдите длину стороны сечения, лежащую на основании пирамиды.

Глава

2 ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Задачи к § 6

2.001. ☺ Точки A, B, C и P не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые BC и AP скрещиваются.

2.002. ☺ Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. 1) Выделите в нем ребро BB_1 и назовите все ребра куба: а) параллельные ему; б) пересекающие его; в) скрещивающиеся с ним. 2) Выделите диагональ AD_1 грани ADD_1A_1 куба и назовите диагонали других граней: а) параллельные AD_1; б) пересекающие ее; в) скрещивающиеся с ней. Ответ обоснуйте.

2.003. Каково взаимное расположение прямых, содержащих ребра A_1D_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$? Существуют ли в грани AA_1B_1B прямые, пересекающие каждую из прямых A_1D_1 и BB_1? Если существуют такие прямые, то каково их число?

2.004. ☺ Прямая a лежит в плоскости α. Прямая b параллельна прямой a и имеет общую точку M с плоскостью α. Докажите, что прямая b также лежит в плоскости α.

Решение. Так как прямые a и b параллельны, то через них можно провести плоскость. Обозначим ее β (рис. 19). Прямая b проходит через точку M, поэтому плоскость β проходит через прямую a и точку M. Но через M и a проходит и плоскость α. По теореме 1 плоскости α и β совпадают. Это означает, что $b \subset \alpha$.

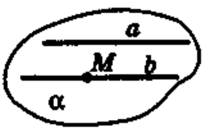


Рис. 19

Заметим, что можно рассуждать и так. Предположим, что прямая b не лежит в плоскости α, а имеет с ней только одну общую точку M, то есть прямая b пересекает плоскость α в точке M.

Так как прямые a и b параллельны, то они не пересекаются. Значит, точка M пересечения прямой b с плоскостью α не принадлежит прямой a, которая, в свою очередь, лежит в плоскости α. Тогда по признаку скрещивающихся прямых прямые a и b должны скрещиваться. Это противоречит условию задачи: $a \parallel b$. Следовательно, предположение о том, что прямая b не лежит в плоскости α, неверно. Это означает, что $b \subset \alpha$.

2.005. Прямые a и b параллельны. Прямая b лежит в плоскости α. Может ли прямая a пересекать плоскость α?

2.006. Дано: $a \parallel b$, $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$. Каково взаимное положение прямых a_1 и b_1? Ответ обоснуйте.

2.007. Даны четыре попарно параллельные прямые a, b, c и d, никакие три из которых не лежат в одной плоскости. Нарисуйте все плоскости, проходящие через каждые две из данных прямых. Сколько таких плоскостей можно провести?

2.008. ☺ Дано: прямые a и b скрещиваются, $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$. Каким может быть взаимное расположение прямых a_1 и b_1? Ответ обоснуйте.

2.009. ☺ Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Точки A_1, A_2, A_3 лежат на прямой a, точки B_1, B_2, B_3 — на прямой b. Могут ли отрезки A_2B_2 и A_3B_3 иметь общую середину? Ответ обоснуйте.

2.010. ☺ Докажите, что середины ребер AP, CP, BC и AB тетраэдра $PABC$ лежат в одной плоскости. Определите вид фигуры, вершинами которой служат эти точки.

2.011. ☺ Прямые a и b параллельны. Докажите, что все прямые пространства, пересекающие обе прямые a и b, лежат в одной плоскости.

2.012. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $ABPK$, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что треугольники AKD и BCP равны.

2.013. Треугольник ABC лежит в плоскости α. Через его вершины проведены параллельные прямые, не лежащие в плоскости α. На них отложены равные отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 по одну сторону от α. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

2.014. ☺ Плоскости α и β пересекаются по прямой p. Точка A лежит в плоскости α, точка B — в плоскости β, причем ни одна из них не лежит на прямой p. Докажите, что прямые p и AB скрещиваются.

2.015. ☺ Конец B отрезка AB лежит в плоскости α; C — внутренняя точка отрезка AB. Через A и C проведены параллельные прямые, пересекающие α соответственно в точках A_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если: а) $BC = 12$, $AB : AA_1 = 3 : 5$; б) $AA_1 = 15$, $AC : CB = 2 : 3$; в) $AA_1 = 21$, $AC : AB = 2 : 7$.

Решение. Параллельные отрезки AA_1 и CC_1 определяют плоскость β, которая содержит отрезок AB и пересекает плоскость α по прямой A_1C_1, проходящей через точку B (рис. 20).

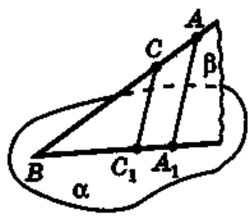


Рис. 20

Для вычисления длины отрезка CC_1 используем обобщенную теорему Фалеса в плоскости β.

Исходя из условия $CC_1 \parallel AA_1$, имеем: а) $AB : AA_1 = BC : CC_1 = 3 : 5$, откуда $CC_1 = \frac{5}{3}BC = 20$; б) $AC : CB = 2 : 3 \Rightarrow BC : AB = 3 : 5 \Rightarrow BC = \frac{3}{5}AB$.

Далее, $\triangle CBC_1 \backsim \triangle ABA_1 \Rightarrow BC : AB = CC_1 : AA_1 \Rightarrow CC_1 = \frac{BC \cdot AA_1}{AB} = \frac{0{,}6AB \cdot AA_1}{AB} = 0{,}6 \cdot 15 = 9$;

в) $AC : AB = 2 : 7 \Rightarrow BC : AB = 5 : 7 \Rightarrow BC = \frac{5}{7}AB$. Тогда $\triangle CBC_1 \backsim \triangle ABA_1 \Rightarrow CC_1 : AA_1 = BC : AB \Rightarrow CC_1 = \frac{BC \cdot AA_1}{AB} = \frac{5}{7}AA_1 = 15$.

Ответ: а) 20; б) 9; в) 15.

2.016. ♉ Прямая AB пересекает плоскость α. Через концы отрезка AB и его середину C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1 и C_1. Рассмотрите случаи: 1) отрезок AB не пересекает плоскость α; 2) отрезок AB пересекает α. В каждом случае найдите: а) длину отрезка CC_1, если: $AA_1 = 7$, $BB_1 = 5$; б) длину отрезка AA_1, если $BB_1 = 7$, $CC_1 = 11$.

2.017. Даны прямые a и b. Какую фигуру заполняют все прямые пространства, пересекающие a и параллельные b, если прямые a и b: а) скрещиваются; б) пересекаются; в) параллельны?

2.018. Дан тетраэдр $PABC$. Точки K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 — середины ребер соответственно AP, AB, BC, CP, PB, AC. Как расположены прямые: а) AP и BC; б) K_1K_5 и BC; в) K_2K_5 и K_3K_4; г) K_1K_2 и K_3K_4; д) K_1K_5 и K_2K_4; е) K_2C и K_3K_6; ж) K_5K_6 и K_1K_2; з) K_2K_4 и K_5K_6?

2.019. Через вершины A, B, C и D параллелограмма $ABCD$, расположенного в одном полупространстве относительно плоскости α, точку O пересечения его диагоналей и центроид M треугольника BCD проведены параллельные прямые, которые пересекают данную плоскость α соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1, M_1. Найдите MM_1, OO_1 и DD_1, если $AA_1 = 17$, $CC_1 = 5$, $BB_1 = 15$.

2.020. Каким может быть взаимное расположение двух прямых, если: а) они обе лежат в одной плоскости; б) не существует плоскости, в которой они обе лежат; в) одна из них лежит в плоскости α, другая — в плоскости β; г) одна из них лежит в плоскости α, а другая пересекает эту плоскость? Сделайте соответствующие рисунки.

2.021. ☺ Каждая из двух прямых a и b скрещивается с третьей прямой c. Верно ли, что прямые a и b скрещиваются? Ответ обоснуйте.

2.022. ☺ Даны две скрещивающиеся прямые a и b и не принадлежащая им точка C. Через точку C проведите прямую p, чтобы она пересекала прямые a и b. Всегда ли задача имеет решение?

2.023. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Точки A_1, A_2, A_3 принадлежат прямой a, точки B_1, B_2, B_3 — прямой b; точка B_1 — середина отрезка A_1C_1, точка B_2 — середина A_2C_2, точка B_3 — середина A_3C_3. а) Могут ли совпадать точки C_1 и C_2? б) Чему может быть равно расстояние C_2C_3, если $C_1C_3 = C_1C_2 = 7$?

2.024. ☺ В треугольнике ABC точка K — середина AC, M — центроид треугольника. Через точки A, B, C, M и K проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость γ в точках A_1, B_1, C_1, M_1 и K_1 соответственно; $AA_1 = 8$, $BB_1 = 11$, $KK_1 = 5$. Найдите MM_1 и CC_1, если плоскость γ не пересекает треугольник.

2.025. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противолежащих ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

2.026. ☺ Дан тетраэдр $ABCD$; K, P — произвольные точки ребер соответственно BC и AD. Определите фигуру, образованную серединами всех таких отрезков PK.

2.027. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 — середины ребер соответственно A_1B_1, B_1C_1, BB_1, CC_1, DD_1, AB и AD. Как расположены прямые: а) P_1P_2 и P_3P_4; б) P_3P_3 и P_6P_7; в) P_2P_3 и P_5P_7; г) P_5P_7 и P_3P_6; д) P_3P_5 и P_3P_7; е) P_1P_2 и P_4P_5; ж) P_1P_3 и P_3P_7?

2.028. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 — центроиды треугольников соответственно BDC, ACD, ABD и ABC; точки K_1, K_2, K_3 — середины отрезков соответственно BC, CD и AB. 1) Определите взаимное положение прямых: а) AM_1 и BC; б) DM_4 и AB; в) AM_3 и BD; г) M_1M_4 и AD; д) DK_2 и BK_3; е) CK_1 и AD. 2) Найдите отношение: а) $M_2M_4 : K_1K_2$; б) $M_2M_4 : BD$.

2.029. ♉ Пусть точка D не лежит в плоскости ABC; K — середина AB; P — середина CD; M — центроид треугольника ABC. а) Докажите, что фигура $ADPB$ не может быть трапецией. б) Докажите, что прямые DM и KP пересекаются. в) В каком отношении (считая от D) прямая KP делит отрезок DM? г) Определите взаимное положение прямых MP и AD. Ответы обоснуйте.

2.030. ☺ В тетраэдре $PABC$ точки K_1, K_2, P_1, P_2 — середины ребер соответственно AP, CP, AB, CB. Докажите, что отрезок, по которому пересекаются треугольники BK_1K_2 и PP_1P_2, параллелен ребру AC и равен $\frac{1}{3}AC$.

Задачи к § 7

2.031. ♉ Прямая AM не лежит в плоскости квадрата $ABCD$, угол MAD — прямой, а угол MAB равен 30°. Найдите угол: 1) между лучами: а) DC и AM; б) BC и MA; в) AM и CD; 2) между прямыми: а) DC и AM; б) BC и MA; в) AC и AD.

2.032. Верно ли утверждение: если две прямые в пространстве перпендикулярны третьей прямой, то эти прямые параллельны? Является ли это утверждение верным, если: а) все три прямые лежат в одной плоскости; б) все три прямые параллельны одной плоскости; в) каждые две из них скрещиваются?

2.033. Прямые a и b параллельны, прямая c перпендикулярна прямой a. Перпендикулярны ли прямые b и c? Может ли прямая a пересекать плоскость, в которой лежат прямые b и c?

2.034. ♉ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали AC и BD грани $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите угол между прямыми: а) AD_1 и A_1C_1; б) AB и DC_1; в) AB и C_1D_1; г) AD_1 и OD_1; д) AA_1 и OD_1.

2.035. ♉ Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте угол между прямыми A_1B и B_1E и найдите его величину, если длина ребра куба равна a.

2.036. Пусть E и F — середины ребер соответственно AB и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Опустите перпендикуляры из вершины A_1 на следующие прямые: а) AD_1; б) D_1E; в) BD; г) EF; д) C_1D.

2.037. ♉ $EFGHE_1F_1G_1H_1$ — куб. Точки L, N и T — середины ребер F_1G_1, G_1H_1 и H_1H соответственно; K — точка пересечения диагоналей грани EE_1F_1F.

Заполните таблицу расположения прямых и углов между ними.

	Прямые	Расположение	Угол между прямыми
1	LN и EG		
2	F_1T и FH		
3	F_1N и KT		
4	TN и EG		
5	F_1T и KN		
6	KH_1 и LN		

2.038. ☺ Найдите угол между непересекающимися диагоналями двух соседних граней куба.

2.039. Точка E — середина ребра PB правильного тетраэдра $PABC$. Опустите перпендикуляры из точки E на прямые: а) AP; BC и AB; б) AC. Найдите длину каждого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно a.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 2

2.040. Даны скрещивающиеся прямые a и b; прямая c пересекает каждую из данных прямых. Докажите, что любая прямая, параллельная прямой c, скрещивается по крайней мере с одной из прямых a, b.

2.041. ♉ Из всех вершин и точки M пересечения диагоналей трапеции $ABCD$, расположенной в одном полупространстве относительно плоскости α, проведены параллельные прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, MM_1 до пересечения с плоскостью α. Точки A_1, B_1, C_1, D_1, M_1 принадлежат плоскости α. Найдите MM_1 и CC_1, если $BC \parallel AD$; $BC = \frac{1}{2}AD$; $AA_1 = 18$; $BB_1 = 7$; $DD_1 = 10$.

2.042. Пусть точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC. а) Докажите, что прямые AD и BC скрещиваются. б) Докажите, что прямые DM_1 и AM_2 пересекаются (M_1 и M_2 — точки пересечения медиан треугольников ABC и DBC). в) В каком отношении (считая от точки D) прямая AM_2 делит отрезок DM_1? г) Определите взаимное расположение прямых AD и M_1M_2. Ответ обоснуйте.

2.043. В тетраэдре $A_1A_2A_3A_4$ с ребром 6 точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 — середины ребер соответственно A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3; M_1, M_2, M_3, M_4 — центроиды граней соответственно $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ (рис. 21).

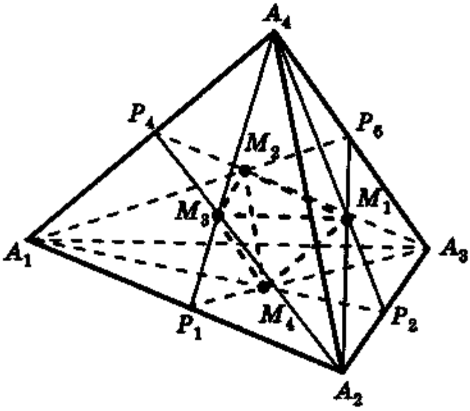


Рис. 21

1) Докажите, что: а) прямая A_4M_4 скрещивается с каждой из сторон треугольника $A_1A_2A_3$; б) четырехугольник $A_1A_4P_6A_2$ — не трапеция; в) ребра тетраэдра $M_1M_2M_3M_4$ параллельны соответствующим ребрам данного тетраэдра. 2) Проверьте, не является ли тетраэдр $M_1M_2M_3M_4$ правильным. Если этот тетраэдр — правильный, найдите длины его ребер. 3) Найдите углы между следующими прямыми: а) M_1M_4 и A_2A_4; б) M_1M_2 и P_1P_6; в) P_2P_4 и A_1A_4; г) M_2M_4 и A_2P_4.

2.044. ♉ $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 6. Точка H лежит на ребре AB так, что $AH : HB = 1 : 3$. Проведите через точку H перпендикуляры на следующие ребра тетраэдра: а) AC и AP; б) BC и BP; в) AB (в каждой из граней ABC и ABP). Найдите длину каждого перпендикуляра.

2.045. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром a; O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 — центры граней соответственно ABB_1A_1, BCC_1B_1, C_1D_1DC, AA_1D_1D, $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$; M_1 — центроид треугольника ACB_1 (рис. 22). Определите: 1) взаимное положение прямых:

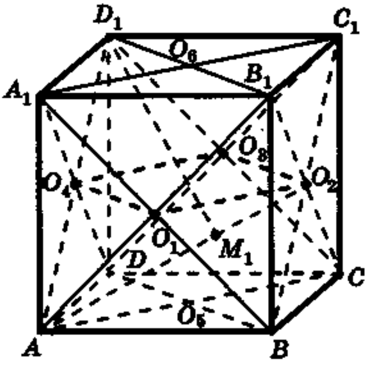


Рис. 22

а) D_1M_1 и AC; б) AC и BC_1; в) O_1O_2 и O_3O_4; г) O_1O_2 и BD; д) B_1O_5 и BC_1; 2) какой фигурой является четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$; 3) отношение отрезков: а) O_1O_5 и B_1C_1; б) O_1O_5 и B_1B; в) M_1O_5 и A_1A; 4) величину угла между прямыми: а) A_1C_1 и AD_1; б) A_1B и AC; в) A_1B и DC_1; г) CD_1 и BO_6; д) A_1B и CD.

2.046. ♉ Точки A, B, C и D не принадлежат одной плоскости. Точки K, M, L и N принадлежат соответственно отрезкам BD, AD, AC и BC так, что $DK : KB = DM : MA = CL : LA = CN : NB = 1 : 4$. Определите периметр четырехугольника $KMLN$, если $AB = 25$, $CD = 30$.

2.047. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина B_1C_1, точка F — середина D_1C_1, точка K — середина DC, O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Заполните таблицу:

	Прямые	Расположение	Угол между прямыми
1	AA_1 и CC_1		
2	A_1C_1 и B_1D_1		
3	A_1C_1 и C_1D_1		
4	A_1M и CC_1		
5	A_1D и DC_1		
6	A_1C_1 и BD		
7	A_1C и AC		
8	A_1B и D_1C		
9	A_1C и BB_1		
10	A_1D и AC		
11	A_1M и BC		
12	A_1M и BK		
13	C_1K и B_1F		
14	C_1O и AB_1		
15	A_1B и B_1D		

2.048. Дан правильный тетраэдр $PABC$. Точка K — середина ребра PB. Опустите из точки K перпендикуляры на прямые: а) AP; б) AC; в) BH, где точка H — середина ребра AC.

2.049. В правильной треугольной пирамиде $PABC$ с вершиной P углы APB, BPC и APC — прямые. Точка H — центр правильного треугольника ABC. Опустите из точки H перпендикуляры на прямые: а) CP; б) BP; в) AP.

2.050. В основании пирамиды $PABC$ лежит правильный треугольник ABC, а треугольники PAB и PAC — прямоугольные, причем $AP = AB$. Точка M — середина ребра PA. Опустите перпендикуляры из точки M на следующие прямые: а) BC; б) PC; в) AH, где точка H — середина ребра BP.

2.051. В правильной пирамиде $PABC$ с вершиной P углы APB, BPC и APC — прямые. Точка H — середина апофемы PK грани BPC. Опустите из точки H перпендикуляры на прямые: а) CP; б) AC; в) AP.

2.052. Пусть точка M — середина ребра AB пирамиды $ABCD$, а точка N делит ребро AC в отношении $1:2$, считая от вершины A. Докажите, что в плоскости грани BCD нет ни одной прямой, параллельной прямой MN.

2.053. ♉ Равнобедренные трапеции $ABCP$ и $PCMK$ имеют общую боковую сторону и лежат в разных плоскостях, причем $BC = 3$, $AP = 12$, $PK = 24$. Определите взаимное расположение прямых AB и MK при каждом из следующих значений длины отрезка MC: а) 5; б) 6; в) 7; г) 8.

2.054. ♉ $ABCD$ — правильный тетраэдр с длиной ребра 7. Точки M и K — середины ребер BD и AC соответственно. Точка P делит ребро AC в отношении $5:2$, считая от точки C. Найдите длину заключенного внутри тетраэдра отрезка прямой, проходящей через точку P параллельно прямой KM.

Глава

3 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Задачи к § 8

3.001. Через данную точку A, не принадлежащую данной плоскости α, проведите прямую, параллельную α.

3.002. Верно ли утверждение: если прямая параллельна плоскости, то она не пересекает ни одной прямой: а) лежащей в этой плоскости; б) параллельной этой плоскости? Ответ обоснуйте.

3.003. Известно, что прямая m параллельна плоскости α. Параллельна ли эта прямая любой прямой, лежащей в плоскости α? Ответ обоснуйте.

3.004. Через данную прямую a проведите плоскость, параллельную данной прямой b. (Рассмотрите возможные случаи взаимного расположения прямых a и b.)

3.005. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Через каждую точку прямой a проводится прямая, параллельная прямой b. Докажите, что все такие прямые лежат в одной плоскости. Как расположена эта плоскость по отношению к прямой b? Ответ обоснуйте.

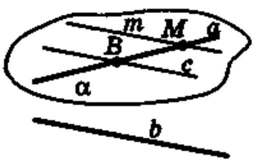


Рис. 23

Решение. Отметим на прямой a произвольную точку B и проведем через нее прямую c (единственную!), параллельную прямой b. Через пересекающиеся прямые a и c проводим плоскость (единственную!). Обозначим ее через α (рис. 23). Эта плоскость (по признаку параллельности прямой и плоскости) параллельна прямой b.

Пусть M — произвольная точка прямой a, m — прямая, проходящая через точку M параллельно прямой b. Тогда прямая m параллельна прямой c (т. 7) и лежит в плоскости α (почему?). В силу произвольного выбора точки M на прямой a

можно сделать вывод: ***все прямые пространства, параллельные прямой b и пересекающие прямую a, лежат в плоскости, которая проходит через прямую a и параллельна прямой b.***

Самостоятельно докажите единственность плоскости α.

3.006. ☺ В тетраэдре $ABCD$ точки K, F, N и M — середины ребер соответственно AD, BD, BC и AC. Заполните таблицу, выбрав (обведя в кружок) определенное вами расположение указанных прямой и плоскости: А — пересекаются, Б — параллельны, В — прямая лежит в плоскости, Г — невозможно определить:

	Прямая и плоскость	Взаимное расположение
1	DB и AMN	А Б В Г
2	MN и ABC	А Б В Г
3	KC и DMN	А Б В Г
4	MN и ABD	А Б В Г
5	KF и DMN	А Б В Г
6	FN и KMF	А Б В Г
7	CF и ADN	А Б В Г
8	FN и DMK	А Б В Г

3.007. ☺ Прямая a параллельна плоскости α и лежит в плоскости β. Плоскости α и β пересекаются по прямой b. Как расположены прямые a и b? Ответ обоснуйте.

3.008. Прямая a параллельна плоскости α. Прямая b пересекает прямую a. Каким может быть взаимное расположение b и α?

3.009. Прямая a параллельна плоскости α. Каким может быть взаимное расположение прямых a и b, если прямая b лежит в α?

3.010. Даны плоскости α и β и прямая a. Причем $\alpha \cap \beta = b$, $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$. Каково взаимное расположение прямых a и b?

3.011. Докажите, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой, и притом только одну.

3.012. Справедливо ли утверждение: а) $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha \Rightarrow a \parallel b$; б) $a \parallel \alpha$, $\beta \parallel a \Rightarrow \alpha \parallel \beta$; в) $a \nparallel \alpha$, $b \nparallel \alpha \Rightarrow a \nparallel b$? Ответ обоснуйте и сделайте соответствующий рисунок.

3.013. Дано: $a \parallel \alpha$, $a \parallel b$, $b \parallel \beta$, $\alpha \parallel \beta$. Какое из четырех утверждений является следствием трех оставшихся? Ответ обоснуйте и сделайте соответствующий рисунок.

3.014. Через данную точку M проведите: а) прямую, параллельную каждой из двух данных пересекающихся плоскостей α и β; б) плоскость, параллельную каждой из двух данных скрещивающихся прямых a и b.

3.015. ☺ В правильном тетраэдре $DABC$, все ребра которого равны 6, точка K лежит на ребре BD так, что $DK = 2$; точка M лежит на ребре BC так, что $BM = 4$; точка P — середина ребра AB. а) Докажите, что KM параллельна плоскости ADC. б) Докажите, что PM не параллельна плоскости ADC. в) Проведите через точку P прямую, параллельную плоскости ADC и пересекающую ребро DB в точке L. Найдите длину LK. г) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки P и K параллельно прямой AC.

3.016. ☺ Постройте сечение тетраэдра $PABC$ плоскостью, проходящей через внутреннюю точку H грани ABC параллельно прямым BC и AP.

3.017. ☺ Основанием четырехугольной пирамиды $PABCD$ является параллелограмм $ABCD$. Постройте ее сечение плоскостью, проходящей через AB и точку K, лежащую в грани: а) BCP; б) DCP. Какая фигура получается в сечении?

3.018. ♉ Основанием правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ является квадрат $ABCD$. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через AB и точку K — середину ребра PC. Найдите площадь этого сечения, если все ребра пирамиды равны 8.

3.019. ☺ Постройте прямую, которая: а) лежит в данной плоскости α и параллельна данной прямой a; б) лежит в данной плоскости α и параллельна данной плоскости β;

в) проходит через данную точку A и параллельна данной плоскости β; г) параллельна каждой из двух данных пересекающихся плоскостей α и β; д) параллельна данной плоскости α и пересекает каждую из двух данных прямых a и b.

3.020. Постройте плоскость, которая: а) проходит через данную точку A и параллельна данной прямой m; б) проходит через данную прямую a и параллельна данной прямой m; в) проходит через данную точку A и параллельна данным прямым a и m.

3.021. Даны три попарно скрещивающиеся прямые a, b и c. Всегда ли существует плоскость: а) параллельная каждой из этих прямых; б) пересекающая каждую из них? Ответ обоснуйте и выполните соответствующий рисунок.

3.022. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 — середины ребер соответственно AB, BB_1, B_1A_1, A_1A, CD, CC_1, C_1D_1, DD_1. Каково взаимное положение таких прямых и плоскостей, как: а) P_3P_4 и $P_1P_2P_6$; б) P_7P_8 и $P_1P_2P_6$; в) P_4P_7 и $P_1P_2P_5$; г) P_1P_6 и AB_1D; д) AC и $P_3P_4P_5$; е) BD и $P_3P_4P_5$?

3.023. ♉ Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, P и Q — внутренние точки граней соответственно $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки P и Q и параллельной прямой CC_1.

3.024. ♉ Через вершину P правильного тетраэдра $PMBH$ с ребром, равным 8, проведите сечение, параллельное ребру MB. Сколько таких сечений тетраэдра можно провести? Какие фигуры при этом получаются в сечениях? Найдите площадь сечения, проходящего через середину K ребра BP.

3.025. ♉ В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной P все ребра равны 4. Постройте сечение этой пирамиды, проходящее через центр O ее основания параллельно ребру BC и медиане PK грани BCP. Установите форму полученного сечения; найдите его периметр и площадь.

3.026. ♉ Дан правильный тетраэдр $PABC$ с ребром 6. Через центр O основания ABC тетраэдра проведена плоскость α, параллельная BC и пересекающая ребро AP в некоторой точке K. Постройте сечение тетраэдра плоскостью α. Укажите границы изменения периметра и площади этого сечения при всевозможных положениях точки K на ребре AP.

3.027. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точки P и Q — середины ребер AB и BC соответственно. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки P и Q параллельно диагонали BD_1 куба.

3.028. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точка P — середина ребра AA_1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки P и D_1 параллельно диагонали AC грани $ABCD$ куба. Найдите периметр сечения, если ребро куба равно 10.

Задачи к § 9—10

3.029. (*Устно.*) Докажите, что отрезок, соединяющий центры двух противоположных граней куба, перпендикулярен этим граням.

3.030. (*Устно.*) Через центр O окружности, описанной около треугольника ABC, проведена прямая перпендикулярно плоскости этого треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершин треугольника.

3.031. Через точку M прямой a проводятся прямые, перпендикулярные прямой a. Докажите, что все они лежат в одной плоскости.

3.032. (*Устно.*) Из точки M вне плоскости α проведены к ней три равные наклонные MA, MB и MC. Докажите, что основание H перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость α, является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

3.033. Расстояние от точки M до плоскости правильного шестиугольника со стороной 8 равно 8. Найдите расстояния от точки M до сторон шестиугольника, если она равноудалена от каждой из них.

3.034. ♉ Точка P удалена от каждой стороны правильного треугольника на 30 см. Найдите расстояние от точки P до плоскости треугольника, если площадь вписанного в этот треугольник круга равна 576π см^2.

3.035. ♉ Точка M удалена от плоскости прямоугольного треугольника на расстояние, равное $5\sqrt{3}$, и равноудалена от каждой его стороны. Найдите расстояние от точки M до каждой из сторон этого треугольника, если его гипотенуза и один из катетов равны соответственно 25 и 15.

3.036. Точка O — центроид правильного треугольника ABC; OP — прямая, перпендикулярная плоскости ABC; M — произвольная точка прямой OP ($M \neq O$). Докажите, что: а) расстояния от точки M до вершин треугольника ABC равны; б) расстояния от точки M до сторон треугольника ABC равны; в) $\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO$; г) $\angle AMO = \angle BMO = \angle CMO$.

3.037. ☺ Прямая AK перпендикулярна к плоскости квадрата $ABCD$. Докажите, что: а) KD перпендикулярна CD; б) BC перпендикулярна BK; в) KC перпендикулярна BD.

3.038. ☺ Из точки M проведен перпендикуляр MB к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что треугольники AMD и CMD — прямоугольные. Перпендикулярны ли прямые MD и AC?

3.039. ☺ Прямая AK перпендикулярна плоскости параллелограмма $ABCD$. Оказалось, что KD перпендикулярна CD. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

3.040. Прямая AK перпендикулярна плоскости параллелограмма $ABCD$. Оказалось, что KC перпендикулярна BD. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

3.041. ☺ Два прямоугольных треугольника ACB и ACM с прямым углом в вершине C имеют общий катет AC. Прямые AC и BM скрещиваются. Докажите, что: а) CM — проекция наклонной BC на плоскость AMC; б) CB — проекция наклонной MC на плоскость ABC.

3.042. Прямая BM перпендикулярна плоскости треугольника AMC, а прямая BK перпендикулярна прямой AC, где точка K — середина отрезка AC. Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный, и укажите его равные углы.

3.043. Прямая BM перпендикулярна плоскости треугольника AMC, а прямая BC перпендикулярна AC. Докажите, что треугольник AMC — прямоугольный, и укажите его прямой угол.

3.044. Прямая OB перпендикулярна плоскости окружности с центром O. Прямая a касается этой окружности в точке K. Докажите, что BK перпендикулярна прямой a.

3.045. Равные треугольники имеют общую сторону. Какую фигуру заполняют высоты всех таких треугольников, опущенные на эту сторону?

3.046. ♉ Два равнобедренных треугольника PMK ($PM = PK$) и PHT ($PH = PT$) имеют общую медиану PO. Докажите, что PO перпендикулярна плоскости MHK.

3.047. ☺ Точка O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$, M — точка вне плоскости этого параллелограмма. При этом $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что $MO \perp (ABC)$.

3.048. Прямая a пересекает плоскость α в точке M и не перпендикулярна этой плоскости. Докажите, что в плоскости α через точку M проходит прямая, перпендикулярная прямой a, и притом только одна.

3.049. К плоскости правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведен перпендикуляр CM. Докажите перпендикулярность прямых: а) MA и AF; б) ME и EF.

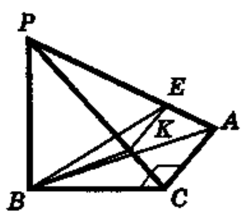


Рис. 24

3.050. К плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) проведен перпендикуляр BP. На наклонных PA и PC отмечены соответственно такие точки E и K, что отрезок EK параллелен AC (рис. 24). Верно ли, что треугольник BKE — прямоугольный?

Решение. Имеем $BP \perp (ABC) \Rightarrow BP \perp AC$. Кроме того, $AC \perp BC$ ($\angle ACB = 90°$). Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AC \perp (BCP)$. Тогда $AC \perp BK$. А так как $KE \parallel AC$ и $AC \perp BK$, то $KE \perp BK$. Это означает, что $\angle BKE = 90°$, т. е. $\triangle BKE$ — прямоугольный.

3.051. В треугольнике ABC угол C прямой. Прямая AM перпендикулярна плоскости ABC. Докажите, что отрезок BC перпендикулярен плоскости ACM. Будет ли отрезок BC перпендикулярен плоскости ACM, если: а) $\angle C \neq 90°$; б) $AM \not\perp (ABC)$?

3.052. ♉ Через точку M высоты AH равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) проведен к его плоскости перпендикуляр MP. Докажите, что $BC \perp LH$, где L — любая точка прямой AP.

3.053. ♉ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F и M — середины ребер соответственно A_1B_1, B_1C_1 и BB_1. Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости EFM.

3.054. В правильном тетраэдре $PABC$ опустите перпендикуляры на плоскость PBC из точек: а) H — середины ребра AP; б) M — середины ребра AB; в) K — середины медианы PT грани ABP; г) L — середины PM.

3.055. ☺ Точка O — центр основания ABC правильного тетраэдра $PACB$, точка K — середина ребра AP. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей: а) через точку O перпендикулярно AC; б) через точку O перпендикулярно прямой BP; в) через точку K перпендикулярно AP; г) через точку K перпендикулярно BC; д) через K перпендикулярно OP.

3.056. ♉ Отрезок BM перпендикулярен плоскости треугольника ABC. Докажите, что: а) высоты треугольников AMC и ABC пересекаются в точке на прямой AC; б) углы ACB и ACM либо оба — острые, либо оба — прямые, либо оба — тупые.

3.057. Отрезок MB перпендикулярен плоскости четырехугольника $ABCD$. На прямой AD взята такая точка K, что $MK \perp AD$. Найдите MK, если: а) $ABCD$ — прямоугольник; б) $ABCD$ — ромб со стороной a и острым углом α; в) $ABCD$ — ромб со стороной a и тупым углом α; г) $ABCD$ — равнобедренная трапеция ($BC \parallel AD$), у которой $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$).

3.058. На высоте AE треугольника ABC взята любая точка M, из которой восставлен перпендикуляр MN к плоскости этого треугольника. Докажите, что для любой точки P прямой MN имеет место: $AP \perp BC$.

3.059. ☺ $ABCD$ — ромб. Точка C — середина отрезка AK; $KF \perp (ABC)$. Какие из прямых BC, BD, CD перпендикулярны AF?

3.060. Прямоугольный треугольник MNL ($\angle MLN = 90°$) вписан в окружность. Отрезок NQ перпендикулярен плоскости MNL. Докажите, что $\angle MLQ = 90°$.

3.061. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K — середина AC, точка F — середина BD. Докажите, что: а) $AC \perp (BDK)$; б) $AC \perp BD$; в) отрезок KF — общий перпендикуляр прямых AC и BD.

3.062. ♉ Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что: а) $BD \perp (AA_1C)$; б) $BD \perp AC_1$; в) $DA_1 \perp AC_1$; г) $AC_1 \perp (A_1BD)$.

3.063. O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Ромб перегнули по диагонали AC так, что точка B оказалась вне плоскости ADC.

Докажите, что: а) проекцией наклонной BO на плоскость ADC служит прямая DO; б) перпендикуляр, опущенный из точки D на плоскость ABC, пересечет прямую BO.

3.064. Основание AD трапеции $ABCD$ является диаметром описанной около трапеции окружности. O — точка пересечения диагоналей этой трапеции. Прямая OM перпендикулярна прямым OA и BC. Докажите, что MC перпендикулярна CD.

3.065. ☺ Прямая BM перпендикулярна плоскости треугольника AMC, а прямая BK перпендикулярна прямой AC. Точка C лежит на отрезке AK. Докажите, что треугольник AMC — тупоугольный, и укажите его тупой угол.

3.066. ♉ O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. PO — перпендикуляр к плоскости ABC; точка M — середина стороны BC. Докажите, что: а) прямая PM является проекцией наклонной OM на плоскость PBC; б) перпендикуляр, опущенный из точки O на плоскость ABP, пересечет медиану PP_1 треугольника ABP.

3.067. ☺ В треугольник ABC вписана окружность с центром O, касающаяся его сторон BC, AC и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Прямая MO перпендикулярна плоскости треугольника ABC. Докажите, что: а) MC_1 перпендикулярна AB; б) OB_1 — проекция наклонной MB_1 на плоскость ABC; в) MC_1 — проекция наклонной OC_1 на плоскость ABM;

г) высота OH треугольника MOB_1 является расстоянием от точки O до плоскости MAC.

3.068. Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен φ. Найдите: а) наклонную и ее проекцию на данную плоскость, если длина перпендикуляра h; б) перпендикуляр и наклонную, если длина проекции наклонной равна b; в) перпендикуляр и проекцию наклонной, если наклонная равна a.

3.069. Через вершину прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена прямая CM, перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $AC = 4$ см, $CM = 2\sqrt{7}$ см.

Решение. Пусть точка K — середина гипотенузы AB треугольника ABC (рис. 25). Так как $AC = CB$, то $CK \perp AB$, и по теореме о трех перпендикулярах отрезок MK перпендикулярен AB. Это означает, что длина отрезка MK — искомое расстояние от точки M до прямой AB.

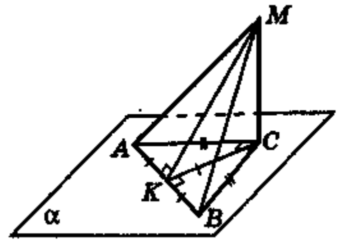


Рис. 25

Далее, так как $MC \perp (ABC)$, то $MC \perp CK$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Поэтому $\triangle MCK$ — прямоугольный, значит, $MK^2 = MC^2 + CK^2$.

Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный прямоугольный ($\angle C = 90°$) и CK — его медиана, то $\triangle CBK$ — равнобедренный прямоугольный ($\angle K = 90°$). Тогда $CK^2 = \frac{1}{2}BC^2 = 8$. Учитывая, что $MK^2 = MC^2 + CK^2$, получаем $MK = 6$.

Ответ: $MK = 6$ см.

3.070. ☺ Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника ABC ($AB = 6$) равно 4. Найдите расстояние от точки M: а) до плоскости треугольника ABC; б) до каждой его стороны.

3.071. Сторона AB, равная 8, правильного треугольника ABC лежит в плоскости α, а длины проекций двух других его сторон на эту плоскость равны $2\sqrt{7}$. Найдите: а) длину проекции медианы CK данного треугольника на плоскость α; б) расстояние от точки C до плоскости α.

3.072. Плоскость α содержит катет AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) и не перпендикулярна катету BC. Найдите длину проекции гипотенузы AB на плоскость α, если известно, что длина катета BC равна b, а расстояние от вершины B до плоскости α равно a.

3.073. ☺ Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Отрезок KM перпендикулярен плоскости этого треугольника. Проведите через точку M перпендикуляры к прямым AC и BC и найдите их длины, если $AC = 8$, $BC = 6$, $KM = 5$.

3.074. ♉ Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, а основание 12 см. Точка M удалена от каждой его стороны на 15 см. Найдите: а) расстояние от точки M до плоскости треугольника; б) площадь круга, вписанного в треугольник.

3.075. ♉ Точка M одинаково удалена от всех сторон треугольника ABC, у которого $AB = 13$ см, $BC = 15$ см, $AC = 14$ см. Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно 3 см. Найдите расстояния от точки M до сторон треугольника.

3.076. ♉ Диагонали ромба равны 30 см и 40 см и пересекаются в точке H. Длина перпендикуляра HM к плоскости ромба равна 5 см. Найдите расстояние от точки M до каждой стороны ромба.

3.077. ♉ Из вершин параллелограмма $ABCD$, его центра O и центроида M треугольника BCD опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, OO_1 и MM_1 на плоскость α. Причем $AA_1 = 34$ см, $CC_1 = 10$ см, $BB_1 = 30$ см. Найдите длины отрезков: а) OO_1; б) DD_1; в) MM_1.

3.078. (*Устно.*) Около окружности радиуса 8 описан ромб со стороной a. Точка M, находящаяся на расстоянии 15 дм от плоскости ромба, равноудалена от его сторон. Найдите расстояние от точки M до сторон ромба. Будет ли изменяться это расстояние с изменением длины стороны a?

3.079. К плоскости ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр CH длиной 9 см. Найдите расстояния от точки H до сторон ромба, если $\angle BAD = 60°$, а сторона ромба — 6 см.

3.080. ♉ В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром, равным 2, точка O — центр основания ABC. Найдите расстояние от точки O до плоскости грани PBC.

3.081. ♉ Точка P равноудалена от всех сторон прямоугольной трапеции с острым углом в 60° и большей боковой стороной, равной $8\sqrt{3}$. Найдите расстояния от точки P до сторон трапеции, если известно, что расстояние от этой точки до плоскости трапеции равно 8.

3.082. $PABC$ — правильный тетраэдр с основанием ABC; A_1 — середина ребра AP; B_1 — середина ребра BP; C_1 — середина ребра CP. а) Постройте сечение тетраэдра плоскостью CBA_1. б) Докажите, что $AP \perp (BCA_1)$. в) Найдите площадь треугольника BCA_1, если ребро тетраэдра равно 2.

Задачи к § 11

3.083. (*Устно.*) Под каким углом к плоскости α следует провести отрезок AB, чтобы он был вдвое больше своей проекции на эту плоскость?

3.084. (*Устно.*) Гипотенуза AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α. Может ли катет AC этого треугольника образовывать с плоскостью α угол в 60°? Найдите наибольшее значение, которое может принимать угол между катетом AC и этой плоскостью.

3.085. ♉ Катет AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α, а катет BC образует с этой плоскостью угол в 45°. Докажите, что гипотенуза этого треугольника образует с плоскостью α угол в 30°.

3.086. ♉ Наклонная AB образует с плоскостью α угол в 45°. В этой плоскости через основание A наклонной под углом 45°

к ее проекции проведена прямая AC. Найдите угол между прямой AC и наклонной AB.

3.087. ♉ Прямоугольник $ABCD$ и прямоугольный треугольник DCP лежат в разных плоскостях. Вершина P проектируется в точку B; $BP = 4$ см, $AB = 4\sqrt{2}$ см, $AD = 4$ см. Найдите угол между прямыми: а) DP и AB; б) PC и AD.

3.088. ☺ $ABCD$ — параллелограмм. Найдите угол между прямой AB и плоскостью α, если прямая CD образует с плоскостью α угол φ.

3.089. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найдите угол между плоскостью A_1CC_1 и прямой a, если прямая a образует с плоскостью ACB_1 угол 45°.

3.090. Прямая AM перпендикулярна плоскости α. Найдите угол между прямой KP и плоскостью α, если угол между прямыми AM и KP равен 60°.

3.091. Угол ABC равен 100°. Найдите угол между прямой AB и плоскостью BMK, если прямая BC перпендикулярна этой плоскости.

3.092. ☺ OM — наклонная на плоскость α. Точка O лежит в α, а расстояние от M до α равно $\rho(M; \alpha)$. Докажите, что синус угла между наклонной OM и плоскостью α равен $\frac{\rho(M;\alpha)}{OM}$.

3.093. ☺ Прямая AB пересекает плоскость α в точке O и образует с ней угол φ; $OB = b$; $OA = a$. Найдите расстояния от точек A и B до плоскости α.

3.094. ☺ Прямая MC перпендикулярна к плоскости треугольника ABC; $BC = MC = 3$; $AC = \sqrt{3}$. Найдите углы, которые образуют прямые BM и AM с плоскостью треугольника.

3.095. ♉ Катет AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α, гипотенуза AB равна 4, а вершина B удалена от плоскости α на расстояние 2. Определите величину угла между плоскостью α и прямой: а) AB; б) BC; в) прямой, содержащей медиану CC_1; г) прямой, содержащей медиану BB_1; д) прямой, содержащей медиану AA_1.

3.096. ♉ O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$. Сторона ромба равна 8, $\angle ABC = 120°$. Длина перпендикуляра OK к плоскости ABC равна 6. Точка O удалена от плоскости ABK на 3. Найдите величину угла, который образует с плоскостью ABK прямая: а) OK; б) AO; в) BD; г) KC; д) KD; е) CD.

3.097. ♉ Прямая DM перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$. O — точка пересечения диагоналей квадрата; точка K — середина стороны CD. Заполните таблицу, если $DM = AD$:

	Прямая и плоскость	Измеряемый плоский угол	Величина угла
1	MC и ABC		
2	MB и ABC		
3	MA и ABC		
4	MO и ABC		
5	AC и MDC		
6	AD и MDC		
7	AB и MDC		
8	OK и MDC		
9	OM и MDC		
10	AC и OAM		
11	AO и ADM		

3.098. ☺ Прямая BK перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника ABC. $BK = AB$; точка M — середина AC. Заполните таблицу:

	Прямая и плоскость	Измеряемый плоский угол	Величина угла
1	KA и ABC		
2	KM и ABC		

Окончание таблицы

	Прямая и плоскость	Измеряемый плоский угол	Величина угла
3	*CA* и *MBK*		
4	*BA* и *BMK*		
5	*AC* и *KBA*		
6	*BM* и *KBA*		
7	*AK* и *BKM*		
8	*BK* и *ACK*		
9	*BM* и *ACK*		
10	*AK* и *BCK*		

3.099. ♉ O — точка пересечения медиан правильного треугольника ABC. MO — перпендикуляр к плоскости ABC; $MA = AB = a$; K — середина BC; P — точка пересечения медиан треугольника MBC. Заполните таблицу:

	Прямая и плоскость	Измеряемый плоский угол	Величина угла
1	*MC* и *ABC*		
2	*MK* и *ABC*		
3	*CB* и *AMK*		
4	*CA* и *AMK*		
5	*OC* и *AMK*		
6	*CM* и *AMK*		
7	*PB* и *AMK*		
8	*AP* и *MBC*		
9	*OM* и *MBC*		
10	*AK* и *MBC*		

Окончание таблицы

	Прямая и плоскость	Измеряемый плоский угол	Величина угла
11	MB и ACP		
12	BC и ACP		

3.100. ☺ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина B_1C_1, точка F — середина D_1C_1, точка K — середина DC, O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Заполните таблицу:

	Прямая и плоскость	Величина угла
1	AB_1 и ABC	
2	AC и AA_1B	
3	MF и DD_1C	
4	MF и DD_1B	
5	AM и ABC	
6	AC и MKF	
7	AK и MKF	
8	AC_1 и BCC_1	
9	C_1D и ACC_1	
10	B_1D и ACC_1	
11	AA_1 и AMF	
12	DD_1 и AMF	

Задачи к § 12

3.101. Какая фигура может служить параллельной проекцией: а) прямой; б) отрезка; в) луча; г) угла; д) плоскости? Выполните рисунки.

3.102. Даны три точки. Как они должны быть расположены в пространстве, чтобы их проекциями были: а) одна точка; б) две точки; в) три точки, лежащие на одной прямой; г) три точки, не лежащие на одной прямой? Выполните рисунки.

3.103. В каком случае: а) проекция точки совпадает с этой точкой; б) проекция прямой совпадает с этой прямой?

3.104. Какая фигура может служить параллельной проекцией двух прямых, если эти прямые: а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются? Выполните рисунки.

3.105. Какая фигура может служить параллельной проекцией: а) окружности; б) треугольника; в) плоского многоугольника; г) неплоского многоугольника? Выполните рисунки.

3.106. Докажите, что параллельная проекция многоугольника, плоскость которого параллельна плоскости проекций, есть многоугольник, равный данному.

3.107. Скрещивающиеся прямые a и b проектируются на плоскость α, пересекающую обе прямые, причем прямая a проектируется параллельно прямой b, а прямая b — параллельно прямой a. Докажите, что проекции данных прямых параллельны.

3.108. Точки A, B и C лежат на прямой и проектируются на плоскость α в точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите A_1B_1, если $AB = 7$, $AC = 3$, а $B_1C_1 = 5$.

3.109. ☺ Можно ли параллелограмм $ABCD$ так перегнуть по диагонали AC, чтобы проекцией треугольника ABC на плоскость ADC был треугольник ADC? Возможно ли, чтобы треугольник ADC был ортогональной проекцией треугольника ABC?

3.110. Точки A и B лежат по одну сторону от плоскости α. Точки A_1 и B_1 — проекции точек соответственно A и B на плоскость α; $AB = A_1B_1$. Прямая AB пересекает плоскость α в точке K. Найдите угол AKM, если M — середина BB_1.

3.111. ☺ Из точки A, лежащей вне плоскости α, проведены к ней две наклонные AB и AC, образующие между собой угол β, а с плоскостью α — угол φ. Найдите угол между ортогональными проекциями данных наклонных на плоскость α.

3.112. ☺ Две вершины A и B разностороннего треугольника ABC лежат в плоскости α, а C не лежит в этой плоскости. Существует ли направление проектирования на плоскость α (и если существует, то какое), при котором проекцией треугольника ABC является треугольник ABC_1: а) равный ABC; б) подобный ABC; в) равный некоторому данному треугольнику; г) подобный некоторому данному треугольнику; д) имеющий данную площадь; е) имеющий угол AC_1B, равный углу ACB; ж) прямоугольный треугольник; з) правильный треугольник; и) квадрат; к) трапеция; л) треугольник, имеющий пересечением медиан данную на плоскости α точку M, не лежащую на прямой AB; м) треугольник, имеющий пересечением биссектрис данную на плоскости α точку L, не лежащую на прямой AB; н) треугольник, имеющий пересечением высот данную на плоскости α точку H, не лежащую на прямой AB?

3.113. ♉ Ортогональной проекцией ромба $ABCD$ на плоскость, проходящую через вершину A ромба и параллельную его диагонали BD, является квадрат $AB_1C_1D_1$ со стороной a. Найдите периметр ромба, если его диагональ AC равна m.

3.114. ♉ Ортогональной проекцией плоского четырехугольника $ABCD$ является квадрат $A_1B_1C_1D_1$ со стороной 4; $AA_1 = 3$, $BB_1 = 6$, $CC_1 = 9$. Найдите длину DD_1, вид, периметр и площадь четырехугольника $ABCD$. Точки A, B, C и D лежат по одну сторону от плоскости проектирования.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 3

3.115. Дан правильный тетраэдр $PABC$, ребро которого равно 5. Постройте его сечение плоскостью, которая проходит через вершину P, центроид M треугольника ABC и параллельна ребру AB. Найдите площадь полученного сечения.

3.116. Дан правильный тетраэдр $PABC$; O — центроид грани ABC, K — середина отрезка PO. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, которая проходит через точку K и параллельна: а) грани ABC; б) грани PBC. Вычислите площади получившихся сечений, если ребро тетраэдра равно 8.

3.117. Что представляет собой множество всех точек пространства, равноудаленных от: а) двух данных точек A и B; б) трех неколлинеарных (не принадлежащих одной прямой) точек A, B и C?

3.118. Точка M равноудалена от двух соседних вершин квадрата $ABCD$. Докажите ее равноудаленность от двух других вершин этого квадрата. Будет ли это верно, если вместо квадрата взять: а) прямоугольник; б) ромб?

3.119. Внутри диагоналей смежных граней куба, лежащих на скрещивающихся прямых, найдите такие точки K и H, что прямая KH параллельна грани куба. В каких границах изменяется длина отрезка KH в кубе с ребром 1?

3.120. Две правильные пирамиды имеют одно и то же основание. Докажите, что их вершины и центр основания принадлежат одной прямой.

3.121. ♉ Докажите, что скрещивающиеся ребра правильного тетраэдра перпендикулярны.

3.122. ♉ Докажите, что диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости CB_1D_1.

3.123. ♉ В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = \frac{16}{3}$, $AD = 14$.

Две равные равнобедренные трапеции $APFD$ и $BCKL$ ($AD \parallel PF$ и $BC \parallel KL$) имеют общую точку O; $AP = 10$, $PF = 2$. Трапеции лежат вне плоскости прямоугольника. Найдите длину общего отрезка MR данных трапеций и площадь треугольника PFK, если O — середина отрезков AP и BL.

3.124. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 16$, $AD = 8$. Два треугольника ABM и CDN (причем $AM = BM = DN = CN = 10$) имеют общую точку O, лежащую вне плоскости прямоугольника. Найдите длину общего отрезка данных треугольников и расстояние между их вершинами M и N, если O — точка пересечения медиан этих треугольников.

3.125. ♉ Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб. В вершине B сходятся равные углы трех его граней. Докажите, что ACC_1A_1 — прямоугольник.

3.126. Прямая BM перпендикулярна плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая пересечения плоскостей ADM и BCM перпендикулярна плоскости ABM и параллельна плоскости ABC.

3.127. ♉ Через каждую из двух скрещивающихся диагоналей боковых граней правильной треугольной призмы проводятся два сечения так, что они параллельны другой из этих диагоналей. Докажите, что эти сечения равны.

3.128. Равные равнобедренные трапеции $ABCD$ и $ABMK$ с общим основанием AB лежат в разных плоскостях; $AC \perp AM$. Докажите: а) BD перпендикулярна BK; б) BD не перпендикулярна BM; в) BD не перпендикулярна плоскости MCP, где P — середина AD.

3.129. Через центры граней правильного тетраэдра проведены прямые, перпендикулярные плоскостям этих граней. Каково взаимное положение этих прямых?

3.130. ♉ В тетраэдре $PABC$ ребро AB перпендикулярно ребру CP и ребро AP перпендикулярно ребру BC. Докажите, что $AB^2 + CP^2 = AP^2 + BC^2$.

3.131. Ребра AB и CP, AP и BC тетраэдра $PABC$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что ребра AC и BP также взаимно перпендикулярны.

3.132. Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведена к этой плоскости наклонная AB. Через точку B проводятся в плоскости α всевозможные прямые, к каждой из которых проводится перпендикуляр из точки A. Определите фигуру, образованную основаниями этих перпендикуляров.

3.133. В тетраэдре $PABC$ плоские углы APB, BPC и CPA прямые. Докажите, что ортогональной проекцией вершины P на плоскость ABC является точка пересечения высот (*ортоцентр*) треугольника ABC.

3.134. В правильном тетраэдре $PABC$ опустите перпендикуляры на плоскость грани BCP из следующих точек: а) E — середины ребра AB; б) K — середины ребра AP; в) H — середины медианы PM грани APC.

3.135. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте и найдите угол между прямыми A_1B и B_1E, если ребро куба a.

3.136. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AP, перпендикулярная плоскости прямоугольника. Известно, что $PD = 6$ см, $BP = 7$ см, $PC = 9$ см. Найдите расстояние между прямыми: а) AP и BC; б) AP и CD; в) BP и CD; г) PD и BC.

3.137. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте его сечение плоскостью, которая проходит через вершину A и перпендикулярна прямой: а) BD; б) B_1D_1; в) CD_1; г) C_1D; д) AD_1; е) B_1D.

3.138. Точка E — середина ребра PC пирамиды $PABC$, в основании которой лежит правильный треугольник ABC, боковое ребро PA перпендикулярно плоскости основания и $AP = AB$. Опустите из точки E перпендикуляры на прямые: а) BP; б) BC; в) AB.

3.139. Пусть E и F — середины соответственно ребер AD и CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Опустите перпендикуляры из вершины A_1 на следующие прямые: а) D_1E; б) D_1F; в) C_1D; г) BD.

3.140. Сторона BC треугольника ABC ($AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$) лежит в плоскости α; расстояние от точки A до плоскости α равно 6. Найдите расстояния от точек B_1 и C_1 до плоскости α, где BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC.

3.141. $ABCD$ — параллелограмм со сторонами $AB = 6$, $BC = 14$. Сторона AD лежит в плоскости β, расстояние от B до β равно 3, M — точка пересечения биссектрис углов A и D параллелограмма. Найдите расстояние от M до плоскости β.

3.142. В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром 2 точка M — середина ребра PC. а) Через центроид грани ABP проведите прямую, перпендикулярную плоскости ABM. б) Найдите длину отрезка этой прямой внутри тетраэдра. в) Найдите отношение, в котором плоскость ABM делит данный отрезок.

3.143. Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$ со стороной a, а боковое ребро равно b. Вершина B_1 параллелепипеда равноудалена от точек A, B, C, D. Найдите площадь диагонального сечения CAA_1C_1.

3.144. ♉ В правильном тетраэдре $PABC$ точка O — центр его основания ABC, точка K — середина ребра PC. Проведите перпендикуляры: а) из K на (ABC); б) из K на (ABP); в) из O на (BCP); г) из O на (ACP). Найдите длины этих перпендикуляров, если ребро тетраэдра равно 2.

3.145. ♉ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка E — середина ребра BB_1, точка K — середина ребра CC_1, точка M — середина ребра A_1B_1. Проведите перпендикуляры: а) из точки A на плоскость BB_1D; б) из точки B на (ACB_1); в) из точки A_1 на (AB_1D_1); г) из точки B на (A_1C_1D); д) из точки E на (ADD_1); е) из точки K на (BB_1D); ж) из точки M на (AB_1D_1). Найдите длину каждого из этих перпендикуляров, если ребро куба равно a.

3.146. Точка E — середина ребра PB правильного тетраэдра $PABC$. Опустите перпендикуляры из точки E на прямые: а) AP; б) AC; в) CM, где M — середина ребра AB. Найдите длину каждого перпендикуляра, если ребро тетраэдра равно a.

3.147. Точки P, Q, R — середины ребер соответственно AB, AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Постройте сечение куба плоскостью PQR и найдите площадь полученного сечения и расстояние от вершины C_1 до секущей плоскости.

3.148. Найдите угол между скрещивающимися: а) диагональю куба и диагональю грани; б) диагоналями соседних граней куба.

3.149. В правильном тетраэдре $PABC$ точка O — центр основания ABC, точка E — середина ребра BP. Найдите угол между прямой OE и следующими прямыми: а) AB; б) BC; в) AC.

3.150. Что представляет собой множество всех точек пространства, равноудаленных от всех сторон данного: а) треугольника; б) плоского выпуклого n-угольника?

3.151. ♉ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите расстояние от центра грани CDD_1C_1 до плоскости AB_1C.

3.152. Плоскость α проходит через высоту AA_1 треугольника ABC перпендикулярно стороне BC, плоскость β проходит через высоту BB_1 этого треугольника перпендикулярно стороне AC. Докажите, что прямая пересечения плоскостей α и β перпендикулярна плоскости ABC.

3.153. ♉ Боковая сторона AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α, а расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до плоскости α равно 12; $AB = 3CD$. Найдите расстояния от точек B и C до плоскости α.

3.154. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 точка M — середина ребра B_1C_1. а) Через точку M проведите прямую, перпендикулярную плоскости B_1CD_1. б) Найдите длину отрезка этой прямой внутри куба. в) Найдите отношение, в котором плоскость B_1CD_1 делит данный отрезок.

3.155. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра AB, точка M — середина ребра BC. Опустите перпендикуляры из точки A_1 на следующие прямые: а) B_1K и B_1M; б) BD и KM; в) C_1B и C_1M.

3.156. ♉ В треугольной пирамиде $KABC$ на ребрах KA, KB и AC взяты соответственно точки M ($KM : MA = 3 : 5$), N ($KN : NB = 7 : 5$) и P ($AP : PC = 2 : 3$). Найдите отношение, в котором плоскость MNP делит ребро BC, считая от точки B.

3.157. Точка A находится на расстоянии 9 от плоскости KMT, а прямые AK и AT образуют с плоскостью KMT углы соответственно 30° и 60°. В каких пределах изменяется длина отрезка KT?

3.158. ♉ На грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите все такие точки K, что прямая D_1K образует с плоскостью ABC угол 45°. Определите длину линии, образованной этими точками, если ребро куба равно 4.

3.159. На грани CDD_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите такую точку K, что углы, образованные прямыми BK и B_1K с плоскостью CDD_1, равны 45°. Определите расстояние от этой точки до плоскости ABC, если ребро куба равно 2.

3.160. ♉ MO — высота правильного тетраэдра $MABC$, точка K делит ребро AC в отношении $AK : KC = 1 : 3$. Найдите угол между прямой MO и плоскостью MBK.

3.161. Точка K лежит на окружности радиуса 1 с центром A. Прямая BK перпендикулярна плоскости окружности и $BK = 1$. Точка P лежит на окружности. Составьте функцию, выражающую зависимость величины угла между прямой BP и плоскостью окружности от величины x угла PAK $(0 < x < \pi)$.

Глава

4 ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Графическая работа № 2 ☺

Тема: «Параллельность в пространстве»

Сделайте чертежи по условиям задач, используя данные в них обозначения.

1. Прямая MP параллельна плоскости α, а прямая MT пересекает эту плоскость в точке T.
2. Плоскость α пересекает три параллельные прямые a, b и c соответственно в точках A, B и C, принадлежащих одной прямой.
3. Плоскость α пересекает три параллельные прямые a, b и c соответственно в вершинах треугольника ABC.
4. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит на плоскости α, а прямые BK и CK пересекают эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1.
5. Плоскость α проходит через середины сторон AB и AC треугольника ABC и не содержит вершины A.
6. Прямая MP параллельна плоскости α, а плоскость PMT пересекает плоскость α по прямой KT.
7. Прямая a параллельна каждой из пересекающихся плоскостей α и β.
8. Прямая a параллельна каждой из параллельных плоскостей α и β.
9. Плоскости α и β имеют общую прямую a, плоскости α и γ — общую прямую b, а плоскости β и γ — общую прямую c. Прямые a и b пересекаются в точке M.
10. Плоскости α и β имеют общую прямую a, плоскости α и γ — общую прямую b, а плоскости β и γ — общую прямую c. Прямые a и b параллельны.
11. Плоскости α и β имеют общую прямую a, плоскости α и γ — общую прямую b, а плоскости β и γ параллельны.

12. Сторона BC треугольника ABC лежит на плоскости α. Через вершину A и точку M — середину стороны AC — проведены соответственно плоскости β и γ, пересекающие плоскость треугольника ABC по прямым AK и MT.

Задачи к § 13

4.001. ☺ Плоскости α и β пересекаются, точка A не принадлежит ни α, ни β. Докажите, что любая плоскость, проходящая через A, пересекает, по крайней мере, одну из плоскостей α и β.

4.002. Плоскости α и β параллельны. Прямая a пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B, а параллельная ей прямая b — соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что отрезки AB и A_1B_1 равны.

4.003. Плоскости α и β параллельны. В плоскости α лежит четырехугольник $ABCD$. Через его вершины проведены параллельные прямые, пересекающие β в точках соответственно A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ — четырехугольник, равный данному.

4.004. ☺ Три прямые a, b и c проходят через точку O и пересекают плоскость α соответственно в точках A, B и C, а параллельную ей плоскость β — соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

4.005. В тетраэдре $PABC$ проведено сечение $A_1B_1P_1$, параллельное грани ABP. Определите взаимное расположение медиан PE и P_1E_1 треугольников соответственно ABP и $A_1B_1P_1$.

4.006. Постройте сечение треугольной пирамиды $PABC$ плоскостью, которая проходит через внутреннюю точку K основания ABC и параллельна грани PAB.

4.007. Постройте сечение пятиугольной пирамиды $PABCDE$ плоскостью α, которая проходит через внутреннюю точку M основания $ABCDE$ параллельно грани PAB (рис. 26).

Рис. 26

Решение. Так как прямые, по которым две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, параллельны, а плоскость α параллельна грани PAB, то: а) прямая пересечения плоскости α с гранью ABC (плоскостью основания пирамиды) должна быть параллельна AB; б) прямая пересечения плоскости α с гранью PAE — параллельна AP; в) прямая пересечения α с плоскостью грани PBC — параллельна PB; г) прямая пересечения плоскости α с плоскостью PAD — параллельна PA, поэтому проводим: 1) через точку M прямую $KF \parallel AB$, $K \in BC$, $F \in AE$; 2) прямую $FH \parallel PA$, $H \in PE$; 3) прямую $KR \parallel PB$, $R \in PC$; 4) прямую $ML \parallel AP$, $L \in PD$. Пятиугольник $HLRKF$ — искомое сечение.

Доказательство проделайте самостоятельно.

4.008. ☺ Точки A, B и C лежат в плоскости α и не лежат на одной прямой. Равные и параллельные отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 расположены по одну сторону от плоскости α. Докажите, что $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$.

4.009. Докажите, что противоположные грани параллелепипеда параллельны (т. е. лежат в параллельных плоскостях).

4.010. (*Устно.*) По какой прямой пересекаются плоскости сечений A_1BCD_1 и BDD_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

4.011. ☺ Точка B не лежит в плоскости треугольника AEC, точки M, K и P — середины отрезков соответственно AB, BC и BE. а) Докажите, что плоскости MKP и AEC параллельны. б) Найдите площадь треугольника MKP, если площадь треугольника AEC равна 48 см^2.

4.012. Три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны.

4.013. Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость A_1DB параллельна плоскости D_1CB_1.

4.014. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNL, если $M \in B_1C_1$, $N \in BB_1$, $L \in DD_1$.

4.015. ♉ На ребрах PA, PB и PC тетраэдра $PABC$ отмечены точки M, K и H так, что $PM : MA = PK : KB = PH : HC$. Докажите, что плоскости MKH и ABC параллельны. Найдите площадь треугольника MKH, если площадь треугольника ABC равна 10 см^2 и $PM : MA = 2 : 1$.

4.016. ♉ Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противолежащую сторону верхнего основания. Найдите площадь этого сечения, если боковые грани призмы — квадраты со стороной 4 см.

4.017. ♉ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите параллельные сечения, одно из которых проходит через прямую AC, а другое — через прямую BC_1. Найдите отношение площадей этих сечений.

4.018. ♉ Прямая DF пересекает параллельные плоскости α, β и γ соответственно в точках D, E и F, при этом $DF = 3$, $EF = 9$. Прямая EG пересекает плоскости α и γ соответственно в точках G и H, при этом $EG = 12$. Найдите длину GH.

4.019. Даны плоскость α и не принадлежащая ей точка A. Докажите, что все прямые пространства, проходящие через точку A и параллельные α, лежат в одной плоскости. Как эта плоскость расположена относительно плоскости α?

4.020. ♉ Плоскости α, β и γ попарно параллельны, прямые a и b скрещиваются. Прямая a пересекает α, β и γ соответственно в точках A, B и C; прямая b — соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$.

4.021. ♉ Скрещивающиеся прямые a и b параллельны плоскости α. Через произвольную точку M плоскости α проведена прямая c, пересекающая a и b соответственно в точках A и B. Докажите, что отношение $AM : MB$ не зависит от выбора точки M в плоскости α.

4.022. ♉ Точка O — центр основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью α, проходящей: а) через O параллельно грани PAB; б) через середину отрезка OB параллельно диагонали AC основания и ребру PD; в) через середину отрезка PO параллельно основанию пирамиды. В каждом случае определите вид сечения и найдите его площадь, если $BC = 12$, $PB = 10$.

4.023. ☺ Параллельные плоскости α и β пересекают сторону AB угла BAC соответственно в точках P и H, а сторону AC этого угла — соответственно в точках Q и K. Найдите: а) AH и AK, если $PH = 2PA$, $PH = 12$ см, $AQ = 5$ см; б) HK и AH, если $PQ = 18$ см, $AP = 24$ см, $AH = \frac{3}{2}PH$.

4.024. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Через точки A и B, расположенные вне этих плоскостей, проводятся параллельно плоскости β и параллельные между собой прямые AC и BD ($C \in \alpha$, $D \in \alpha$), а также — параллельно плоскости α и параллельные между собой прямые AE и BF ($E \in \beta$, $F \in \beta$). Докажите: а) плоскости ACE и BDF параллельны; б) плоскости ACE и BDF пересекают плоскости α и β по параллельным прямым.

4.025. Дан правильный тетраэдр $PABC$; O — центроид грани ABC, K — середина отрезка PO. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, которая проходит через точку K и параллельна: а) грани ABC; б) грани PBC. Найдите площади получившихся сечений, если ребро тетраэдра равно 8.

4.026. На трех попарно параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости, выбраны три равных отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 так, что точки A_1, B_1 и C_1 оказались по одну сторону от плоскости ABC. Докажите, что: а) плоскость ABC параллельна плоскости $A_1B_1C_1$; б) $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$; в) прямая пересечения плоскостей B_1AC и BA_1C_1 параллельна плоскостям ABC и ACC_1; г) прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, параллельна прямым AA_1, BB_1 и CC_1.

4.027. ☺ На трех проходящих через точку E и не лежащих в одной плоскости прямых взяты отрезки AA_1, BB_1, CC_1 так, что $EA : EA_1 = EB : EB_1 = EC : EC_1 = 1 : 5$. Докажите, что: а) плоскость ABC параллельна плоскости $A_1B_1C_1$; б) $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$; в) прямая пересечения плоскостей AB_1C_1 и A_1BC параллельна плоскостям $A_1B_1C_1$ и BC_1C; г) прямая, проходящая через точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, содержит точку E.

4.028. ♉ В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны a. Точка M лежит на ребре AB, причем $AM : MB = 3 : 1$, N — середина B_1C_1. а) Через точку M проведите сечение параллельно плоскости A_1BC. б) Найдите периметр сечения. в) Найдите площадь сечения. г) В каком отношении плоскость сечения делит отрезок AN, считая от A?

4.029. © В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина A_1B_1, N — середина B_1C_1, K — середина AD, P — середина DC, L — середина C_1C, O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Точка A_1 — середина отрезка AQ.

Заполните таблицу, выбрав (обведя в кружок) необходимое расположение указанных плоскостей: А — параллельны, Б — пересекаются, В — совпадают, Г — невозможно определить.

	Плоскости	Взаимное расположение
1	$A_1B_1C_1$ и ADC	А Б В Г
2	MPK и BB_1D	А Б В Г
3	MNK и MNP	А Б В Г
4	D_1KP и BMN	А Б В Г
5	QBO и MKP	А Б В Г
6	QB_1D_1 и A_1DO	А Б В Г
7	MNK и PLN	А Б В Г
8	B_1KP и DMN	А Б В Г
9	A_1DC_1 и AB_1C	А Б В Г
10	QBD и MOB	А Б В Г
11	A_1C_1C и MKP	А Б В Г
12	QC_1D_1 и A_1B_1D	А Б В Г

4.030. © На рисунках 27—41 точки M, P и R расположены либо на ребрах, либо на гранях куба. Пользуясь свойствами параллельных прямых и плоскостей, постройте сечение этого куба плоскостью MPR в каждом из заданных расположений точек M, P и R.

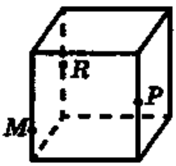


Рис. 27

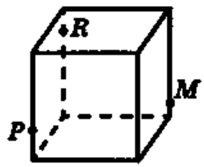


Рис. 28

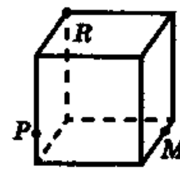


Рис. 29

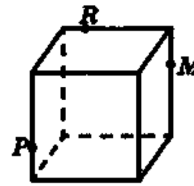


Рис. 30

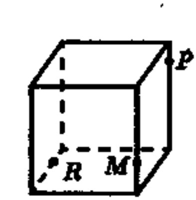


Рис. 31

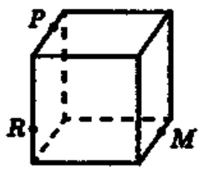


Рис. 32

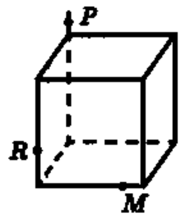


Рис. 33

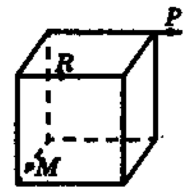


Рис. 34

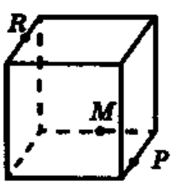
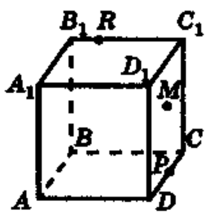
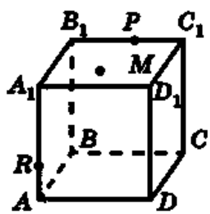


Рис. 35



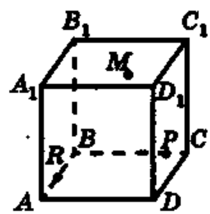
$M \in (BB_1C_1)$

Рис. 36



$M \in (A_1B_1C_1)$

Рис. 37



$M \in (A_1B_1C_1)$

Рис. 38

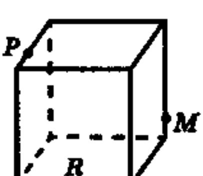
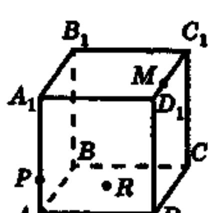
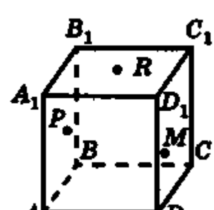


Рис. 39



$R \in (ABC)$

Рис. 40



$P \in (AA_1B_1)$
$R \in (A_1B_1C_1)$
$M \in (DD_1C_1)$

Рис. 41

4.031. ☺ Постройте линию пересечения секущей плоскости NKF с плоскостью PQM, которые заданы точками, расположенными на ребрах и в вершинах куба (рис. 42—44).

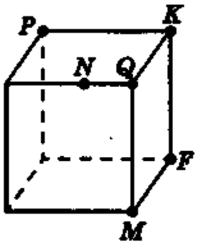


Рис. 42

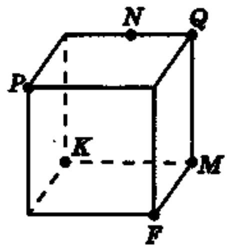


Рис. 43

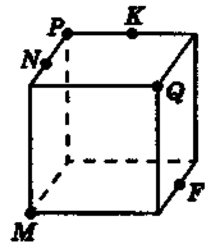


Рис. 44

4.032. ☺ На рисунках 45—50 точки Q, F, K, N и P расположены либо в вершинах, либо на ребрах, либо на гранях куба. Постройте точку пересечения плоскости NKF с прямой PQ.

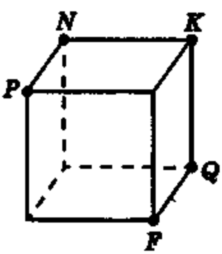


Рис. 45

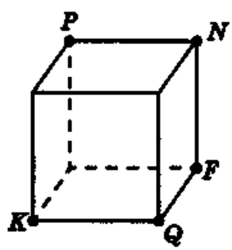


Рис. 46

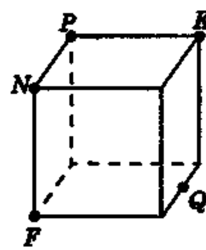


Рис. 47

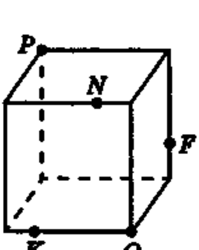


Рис. 48

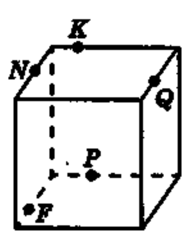


Рис. 49

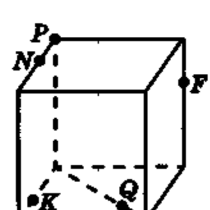


Рис. 50

Задачи к § 14

4.033. ☺ Точка A лежит на одной из граней двугранного угла, равного 30°, и удалена от ребра двугранного угла на 8. Найдите расстояние от точки A до плоскости второй грани двугранного угла.

4.034. ☺ Точки A и B лежат на разных гранях двугранного угла. Прямая AB перпендикулярна ребру двугранного угла, а точки A и B удалены от этого ребра на 3 и 4 соответственно. Найдите величину двугранного угла, если $AB = 5$.

4.035. ☺ Точка A лежит внутри острого двугранного угла величины α и удалена от каждой из его граней на расстояние h. Найдите расстояние от точки A до ребра двугранного угла.

4.036. ☺ Точка A лежит внутри двугранного угла и удалена от его граней на расстояния 1 и $\sqrt{2}$, а от ребра двугранного угла — на 2. Найдите величину двугранного угла.

4.037. Точка A лежит внутри двугранного угла так, что угол между перпендикулярами, опущенными из точки A на грани двугранного угла, равен 131°. Найдите величину двугранного угла.

4.038. ☺ Точки A_1 и A_2 — проекции точки A на плоскости граней двугранного угла. Угол A_1AA_2 равен 100°. Найдите величину двугранного угла.

4.039. ♉ Точки A и B лежат на разных гранях двугранного угла, величина которого 60°. Точки A_1 и B_1 — проекции точек A и B на ребро двугранного угла. $AA_1 = A_1B_1 = BB_1 = 2$. Найдите длину отрезка AB.

4.040. ♉ Точка A лежит внутри двугранного угла. Точки A_1 и A_2 — проекции точки A на грани двугранного угла, а точка K — проекция точки A на ребро двугранного угла. Докажите, что около четырехугольника AA_1KA_2 можно описать окружность, диаметр которой равен AK.

4.041. ☺ Точка A лежит внутри двугранного угла α. Точки A_1 и A_2 — проекции точки A на грани двугранного угла, причем $A_1A = a$, а $A_2A = b$. Используя планиметрическую теорему косинусов, найдите расстояние от точки A до ребра двугранного угла.

4.042. В правильном тетраэдре $PABC$ точки M и K — середины ребер соответственно BC и AP. Докажите, что $\angle AMP$ и $\angle BKC$ — линейные углы двугранных углов соответственно $A(BC)P$ и $B(AP)C$.

4.043. Точка M лежит внутри двугранного угла величиной $60°$ и удалена от его граней на расстояния соответственно 3 и 5. Найдите расстояние от точки M до ребра двугранного угла.

4.044. Катет BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, а угол между плоскостями ABC и α равен $60°$. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если $BC = 9$, $AB = 15$.

4.045. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр AM, равный 10. Угол между плоскостями ABC и MBC равен $45°$. Найдите площадь треугольника MBC.

4.046. ☺ Ребро PC тетраэдра $PABC$ перпендикулярно к плоскости ABC; $AB = BC = CA = 6$, $BP = 3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $P(AC)B$, $P(AB)C$, $B(CP)A$.

4.047. ♉ Докажите, что все двугранные углы правильного тетраэдра равны. Найдите их величину.

4.048. Отрезок DM длиной 3,2 перпендикулярен плоскости ромба $ABCD$ ($\angle ADC$ — тупой). Диагонали ромба равны 12 и 16. Найдите углы между плоскостями: а) ABC и MBC; б) AMD и CMD.

Решение: а) Пусть DE — высота ромба $ABCD$ (рис. 51). Тогда по теореме о трех перпендикулярах $ME \perp BC$ и $\angle DEM = \varphi$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями ABC и MBC. Найдем величину этого угла.

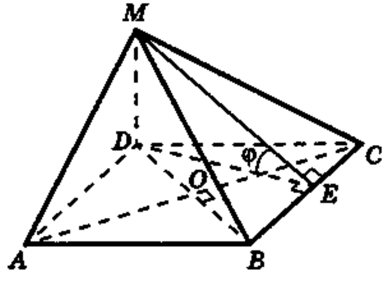


Рис. 51

По условию задачи $DM \perp (ABC)$, поэтому $\triangle MDE$ — прямоугольный, значит, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{DM}{DE}$.

Так как DE — высота ромба $ABCD$, то $DE = \frac{S}{BC}$, где S — площадь этого ромба. Сторона BC ромба является гипотенузой прямоугольного треугольника BOC, катеты OB и OC которого равны 6 и 8. Значит, $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Учитывая, что $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$, находим: $DE = \frac{96}{10} = 9{,}6$. Тогда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{DM}{DE} = \frac{3{,}2}{9{,}6} = \frac{1}{3}$, откуда $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

б) Так как отрезок DM — перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$, то $AD \perp DM$, $CD \perp DM$, значит, $\angle ADC = \psi$ — линейный угол двугранного угла, образованного пересекающимися плоскостями ADM и CDM. Найдем этот угол.

В треугольнике ACD по теореме косинусов находим

$$\cos \psi = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD} = \frac{10^2 + 10^2 - 16^2}{2 \cdot 10 \cdot 10} = -\frac{7}{25},$$

откуда $\psi = \arccos\left(-\frac{7}{25}\right)$.

Ответ: а) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$; б) $\arccos\left(-\frac{7}{25}\right)$.

4.049. Докажите, что биссектрисы всех линейных углов данного двугранного угла лежат в одной полуплоскости.

4.050. Через центр O правильного треугольника KMP со стороной, равной $a\sqrt{3}$, проведен к его плоскости перпендикуляр OH. Угол между прямой HM и плоскостью треугольника KMP равен 45°. Найдите угол между плоскостями: а) HOM и KOM; б) KMP и HPK.

4.051. Через сторону AB основания ABC правильной треугольной пирамиды $PABC$ проведена плоскость α, пересекающая ребро PC в точке K. Найдите площадь сечения ABK, если плоскость α перпендикулярна ребру PC и образует угол в 30° с плоскостью основания. Сторона основания пирамиды равна 8 см.

4.052. *Полуплоскость, границей которой является ребро двугранного угла, делящая его на два равных двугранных угла, называется биссектором двугранного угла.* Докажите, что биссектор двугранного угла есть множество всех точек этого угла, равноудаленных от его граней.

4.053. Найдите угол между гранями тетраэдра, вершинами которого служат концы трех ребер куба, выходящих из одной его вершины.

4.054. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями: а) ACC_1 и BDD_1; б) ABD_1 и ABD; в) BC_1D и ABC; г) ABC_1 и BC_1D.

4.055. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина ребра D_1C_1. Заполните таблицу:

	Плоскости	Взаимное расположение	Угол между плоскостями
1	A_1BA и D_1CD		
2	$A_1B_1C_1$ и DD_1C		
3	A_1BD и B_1D_1C		
4	B_1AC и ADC		
5	A_1BD и C_1DB		
6	A_1BD и CC_1A		
7	AB_1C_1 и ADC		
8	A_1MA и B_1C_1C		
9	A_1MA и BB_1D		
10	MA_1D и CA_1D		

Задачи к § 15

4.056. Докажите, что смежные грани куба взаимно перпендикулярны.

4.057. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны: а) плоскости сечений ACC_1A_1 и BDD_1B_1; б) плоскости A_1BC_1 и BB_1D_1.

4.058. В правильном тетраэдре $PABC$ точка K — середина ребра BC, точка D — середина ребра AP. Докажите, что взаимно перпендикулярны плоскости: а) AKP и BCP; б) AKP и BCD.

4.059. (*Устно.*) Взаимно перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой a. Любая ли прямая плоскости α перпендикулярна плоскости β? Ответ обоснуйте.

4.060. (*Устно.*) Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Каким может быть взаимное расположение двух прямых, одна из которых лежит в плоскости α, а другая — в плоскости β? Выполните соответствующие рисунки.

4.061. Докажите, что все прямые пространства, перпендикулярные данной плоскости α и пересекающие данную прямую m, лежат в одной плоскости, перпендикулярной α. Выполните рисунок.

4.062. ☺ Можно ли через данную точку провести три попарно перпендикулярные плоскости? Ответ обоснуйте и выполните рисунок.

4.063. ♉ Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Прямая p пересекает α и β в точках соответственно A и B, образуя при этом с каждой из плоскостей углы, равные φ. Найдите длину отрезка, концами которого являются проекции точек A и B на линию пересечения данных плоскостей, если длина отрезка AB равна a.

4.064. ♉ Концы A и B отрезка AB, длина которого равна $10\sqrt{2}$ см, принадлежат перпендикулярным плоскостям соответственно α и β. Углы между прямой AB и плоскостями α и β равны соответственно $30°$ и $45°$. Найдите: а) расстояния от концов отрезка AB до линии пересечения плоскостей α и β; б) длины проекций отрезка AB на плоскости α и β.

4.065. Плоскости равнобедренного треугольника ABF и квадрата $ABCD$ перпендикулярны. Найдите расстояние: а) от точки F до прямой CD; б) от точки F до центра окружности, проходящей через точки A, B и центр O квадрата, если сторона квадрата равна 32 и $AF = BF = 20$.

4.066. ☺ Через середины сторон AB и BC треугольника ABC проведены плоскости α и β, перпендикулярные этим сторонам. Точка M принадлежит прямой пересечения плоскостей α и β. Докажите, что точка M одинаково удалена от вершин треугольника ABC.

4.067. ♉ $ABCD$ — ромб с углом 60°. Прямая MA перпендикулярна плоскости ромба, причем $AB = AM = a$. Найдите угол между плоскостями: а) AMB и ABC; б) AMB и AMD; в) MDC и ABC; г) MAD и MBC; д) MDC и BCM.

4.068. ♉ Плоскости ABC и ABD образуют угол в 45°. Известно, что $AD = 3$, $AB = 5$, $BC = \sqrt{2}$; $DA \perp AB$, $CB \perp AB$. Найдите: а) CD; б) угол между прямой CD и плоскостью ABC.

4.069. Прямоугольники $ABCD$ и $ABMK$ лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Верно ли, что: а) $AC \perp AK$; б) $AM \perp AD$; в) $AC \perp AM$?

4.070. $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 8. Через вершину C проведена плоскость α, перпендикулярная ребру AP. Найдите периметр и площадь треугольника, вершинами которого служат точки пересечения плоскости α с ребрами данного тетраэдра.

4.071. ♉ В треугольной пирамиде $MABC$ боковые грани MAC и MBC взаимно перпендикулярны и перпендикулярны основанию пирамиды, которым служит равнобедренный треугольник ACB. Через вершину C проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости грани MAB. Найдите периметр и площадь фигуры, получившейся при пересечении пирамиды и плоскости α, если $MC = 10$ см, $AB = 20$ см.

4.072. ☺ Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите взаимную перпендикулярность следующих пар плоскостей: а) ACC_1 и BDD_1; б) ABC_1 и A_1B_1C; в) BB_1D и BA_1C_1; г) BDA_1 и ACC_1.

4.073. ☺ Равносторонние треугольники ABC и ABD расположены в перпендикулярных плоскостях. Найдите угол между: а) прямой CD и плоскостью ABC; б) плоскостями ACD и BCD.

4.074. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро BB_1 перпендикулярно плоскости ACC_1; б) ребро AB перпендикулярно плоскости CDA_1; в) ребро BC_1 перпендикулярно плоскости AB_1C_1.

Задачи к § 16

4.075. ☺ Прямая AM перпендикулярна плоскости α, проходящей через точку A. Докажите, что расстояние между прямой AM и любой прямой a, лежащей в плоскости α, равно расстоянию от точки A до прямой a.

4.076. ☺ Прямая a не лежит в плоскости α и параллельна прямой b, лежащей в плоскости α. Докажите, что расстояние между прямой a и любой прямой в плоскости α, пересекающей прямую b, равно расстоянию от прямой a до плоскости α. Верно ли, что расстояние между прямыми a и b также равно расстоянию от прямой a до плоскости α?

4.077. ♉ Плоскости квадрата $ABEF$ и ромба $ABCD$ перпендикулярны; $CD = 6$, $\angle C = 60°$. Найдите расстояние между прямыми: а) EF и CD; б) AF и BC.

4.078. На двух скрещивающихся прямых AB и CK выбраны точки A и C так, что угол BAC равен углу ACK и равен $90°$; $AC = 6$. Найдите расстояние между прямыми AB и KC.

4.079. ♉ На двух скрещивающихся прямых AB и CK выбраны точки A и C так, что угол BAC равен углу ACK и равен $90°$; $AB = KC = 6$. Найдите BK, если расстояние между прямыми AB и CK равно 3 и AB перпендикулярна CK.

4.080. ♉ Угол между двумя скрещивающимися прямыми AB и CK равен $60°$, а расстояние между ними равно 3. Точки A и C выбраны так, что угол BAC равен углу ACK и равен $90°$; $AB = 4$; $KC = 2$. Найдите BK.

4.081. Точки A и B лежат на ребре двугранного угла $M(AB)T$, $AB = 4$. MAK и TBP — два линейных угла данного двугранного угла. Определите, чему может быть равно расстояние между прямыми: а) MA и BT; б) AK и PB; в) MK и PT.

4.082. ☺ Плоскости α и β параллельны. Прямая a лежит в плоскости α, а прямые KM и KT — в плоскости β. Расстояние между прямыми a и KM равно 5, а между прямыми a и KT равно 8. Определите: а) взаимное расположение прямых a и KM; б) взаимное расположение прямых a и KT; в) расстояние между плоскостями α и β.

4.083. ♉ AC — перпендикуляр, опущенный на плоскость BCP. Проекция наклонной AB перпендикулярна прямой CP. Найдите расстояние между прямыми AB и CP, если $AC = 4$, $BC = 3$.

4.084. ♉ Из точек A и B на плоскость α опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 и наклонные AP и BT, перпендикулярные к прямой A_1B_1. Найдите расстояние между прямыми AP и BT, если $A_1P = 0{,}5$, $B_1T = 3{,}5$, а $PT = 5$.

4.085. $ABCD$ — квадрат со стороной 4. Точка M лежит на стороне CD и делит ее в отношении $3 : 1$, считая от D. Прямая TM перпендикулярна плоскости квадрата. Найдите расстояния между прямой TM и каждой из прямых, проходящих через две вершины квадрата.

4.086. ☺ Квадрат $ABCD$ со стороной b перегнули по прямой MT (M — середина BC, T — середина AD) так, что образовавшийся двугранный угол $A(MT)C$ равен α. Заполните таблицу:

№	Прямые		Расстояние между прямыми
1	MC	AT	
2	AB	CD	
3	MT	AC	
4	AC	BD	
5	AB	MD	

4.087. ♉ Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. K — середина ребра B_1C_1. Заполните таблицу:

№	Прямые		Расстояние между прямыми
1	AA_1	DC	
2	BB_1	DC_1	
3	DC	A_1K	
4	DD_1	A_1K	

Окончание таблицы

№	Прямые		Расстояния между прямыми
5	B_1D	AC	
6	AK	BC	
7	B_1C	C_1D	
8	AK	BD	
9	DK	AC_1	

4.086. ♉ $MABC$ — правильный тетраэдр с ребром 6. O — центр треугольника ABC. K — середина ребра MB. P — середина ребра AC. Заполните таблицу:

№	Прямые		Расстояние между прямыми
1	AC	MO	
2	BC	AM	
3	OK	PM	
4	MO	KC	
5	BO	AM	

Графическая работа № 3 ☺

Тема: «Перпендикулярность в пространстве»

Сделайте чертежи по условиям задач, используя данные в них обозначения.

1. Прямая AM перпендикулярна плоскости треугольника ABC.
2. Прямая OK проходит через точку O пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ и перпендикулярна его плоскости.
3. Прямая OK проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ (AD — большее основание) и перпендикулярна ее плоскости.

4. Плоскости равносторонних треугольников ABC и ABK перпендикулярны.
5. Прямые OM, OK и OT попарно перпендикулярны друг другу.
6. Плоскость KTC перпендикулярна плоскостям TMC и TBK.
7. Прямая KM перпендикулярна плоскости квадрата $KTPC$, а прямая MA перпендикулярна прямой PT.
8. Прямая KM перпендикулярна плоскости квадрата $KTPC$, а прямая MA перпендикулярна прямой CT.
9. Вершина A треугольника ABC лежит в плоскости α, параллельной прямой BC. Прямые BB_1 и CC_1 перпендикулярны плоскости α и пересекают ее соответственно в точках B_1 и C_1.
10. Прямая AB лежит в плоскости ABC, прямая CK перпендикулярна этой плоскости. Прямая KA перпендикулярна прямой AB. Прямая AT лежит в плоскости ABC и перпендикулярна прямой AB.
11. Прямая KM перпендикулярна плоскости равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) и пересекает ее в точке T — середине отрезка KM. Из точек K и M на прямую BC опущены перпендикуляры.

Задачи к § 17

4.089. ☺ Величина двугранного угла $A(BC)M$ равна 60°. Отрезок AM перпендикулярен плоскости BCM. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника MBC.

4.090. Квадрат $ABCD$ перегнули по его диагонали BC так, что образовался острый двугранный угол α. Найдите отношение площади ортогональной проекции треугольника ABC на плоскость BDC к площади треугольника BDC.

4.091. ☺ В кубе с ребром 10 проведено сечение плоскостью, пересекающей четыре параллельных ребра и образующей с каждым из них угол в 45°. Определите площадь сечения. Как вы думаете: все такие сечения равны или только равновелики?

4.092. ♉ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 проведено сечение плоскостью, которая проходит через середины ребер BC_1 и BA, пересекает ребра AA_1, CC_1, DD_1 и образует с каждым из них угол в 60°. Определите площадь сечения.

4.093. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равно a. Определите площадь сечения, проходящего через: а) вершины A, C и D_1; б) сторону AB и вершину E_1.

4.094. ♉ Сумма площадей всех боковых граней правильной пятиугольной пирамиды в шесть раз больше площади ее основания. Найдите двугранный угол при ребре основания пирамиды.

4.095. ♉ В правильной треугольной пирамиде $MABC$ все боковые ребра образуют с плоскостью основания углы, равные 60°. Найдите отношение площади основания пирамиды к площади сечения, проведенного через вершины B и C перпендикулярно ребру MA.

4.096. ♉ В правильной треугольной пирамиде $MABC$ проведено сечение через середину ребра MC и вершины A и B. Площадь этого сечения составляет $\frac{8}{9}$ площади основания пирамиды. Определите: а) угол наклона плоскости сечения к плоскости основания пирамиды; б) угол, который образует плоскость сечения с боковым ребром пирамиды; в) угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

4.097. ♉ В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ через ребро AB и середину ребра MC проведено сечение, площадь которого в 1,125 раза больше площади основания. Найдите величину угла между плоскостью сечения и плоскостью основания, а также угол при ребре основания данной пирамиды.

4.098. ♉ К плоскости треугольника ABC по одну сторону от нее проведены перпендикуляры AK и BM. Найдите угол между плоскостями ABC и CKM, если $AB = AC = BC = AK = 0{,}5BM$.

4.099. ♉ Угол между плоскостями α и β равен φ. Треугольник ABC, лежащий в плоскости α, спроектировали на плоскость β и получили треугольник $A_1B_1C_1$. Затем треугольник $A_1B_1C_1$ спроектировали на плоскость α и получили треугольник $A_2B_2C_2$ и так далее. После десятого проектирования получился треугольник площадью S. Найдите площадь треугольника ABC и сумму площадей всех треугольников, начиная с треугольника ABC до треугольника $A_{10}B_{10}C_{10}$.

4.100. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр AM, равный 10. Угол между плоскостями ABC и MBC равен 45°. Найдите площадь треугольника MBC.

4.101. В основании прямого параллелепипеда квадрат со стороной a. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра параллелепипеда и наклоненная к плоскости основания под углом φ. Найдите площадь полученного сечения.

4.102. Равнобедренные треугольники ABC и ABK с общим основанием AB лежат в различных плоскостях. Найдите площадь ортогональной проекции треугольника ABC на плоскость ABK, если $AB = 24$ дм, $AC = 13$ дм, $AK = 37$ дм, $CK = 35$ дм.

4.103. Через сторону AB основания ABC правильного тетраэдра $PABC$ проведена плоскость, перпендикулярная ребру PC. Найдите площадь сечения, если сторона основания тетраэдра равна 8 см.

4.104. В правильной четырехугольной призме постройте сечение, проходящее через середины двух смежных сторон основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований. Найдите площадь этого сечения, если сторона основания призмы равна 2 см, а высота — 4 см.

4.105. ♉ В правильной треугольной призме, каждое ребро которой равно 9 дм, постройте сечение, проходящее через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований призмы. Найдите: а) угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы; б) площадь сечения.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 4

4.106. Дана правильная треугольная пирамида. Нарисуйте два ее параллельных сечения, проходящие через: а) среднюю линию основания и среднюю линию боковой грани; б) среднюю линию основания и медиану боковой грани; в) медианы двух боковых граней; г) высоту и среднюю линию боковой грани; д) высоту и медиану боковой грани. (Каждый раз выбираются два отрезка, лежащие на скрещивающихся прямых.)

4.107. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте два его сечения, параллельные между собой и проходящие через прямые: а) AC и B_1D_1; б) AC и C_1D; в) AC и KL, где K и L — середины ребер соответственно A_1B_1 и CD; г) AC и O_1O_2, где O_1 и O_2 — центры граней соответственно AA_1B_1B и $A_1B_1C_1D_1$.

4.108. Точки A и B принадлежат разным граням прямого двугранного угла. Точки A_1 и B_1 — проекции точек A и B на ребро двугранного угла; $AA_1 = a$, $A_1B_1 = b$, $BB_1 = c$. Докажите, что $AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

4.109. Точка A лежит внутри двугранного угла в $60°$; точки A_1 и A_2 — проекции точки A на его грани, причем $A_1A = 5$, $A_2A = 3$. Используя планиметрическую теорему косинусов, найдите расстояние между точками A_1 и A_2.

4.110. $ABCD$ и $ABMK$ — прямоугольники с общим основанием AB, $AC \perp AM$. Докажите: а) $BD \perp BK$; б) BD не перпендикулярно BM.

4.111. ♉ Известно, что в прямоугольном тетраэдре $PABC$ плоские углы APB, BPC и CPA — прямые; $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$. Найдите расстояние между прямыми, содержащими каждые два скрещивающиеся ребра данного тетраэдра.

4.112. В тетраэдре $PABC$ ребро AB перпендикулярно ребру CP и ребро AP перпендикулярно ребру BC. Докажите, что $AB^2 + CP^2 = AP^2 + BC^2$.

4.113. Ребра AB и CP, AP и BC тетраэдра $PABC$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что ребра AC и BP также взаимно перпендикулярны.

4.114. Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведена к этой плоскости наклонная AB. Через точку B проводятся в плоскости α всевозможные прямые, к каждой из которых проводится перпендикуляр из точки A. Определите фигуру, образованную основаниями этих перпендикуляров.

4.115. ♉ В тетраэдре $PABC$ плоские углы APB, BPC и CPA прямые. Докажите, что ортогональной проекцией вершины P на плоскость ABC является точка пересечения высот (*ортоцентр*) треугольника ABC.

4.116. ♉ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите расстояние от центра грани CDD_1C_1 до плоскости AB_1C.

4.117. ♉ В параллельных плоскостях β и β_1, расстояние между которыми b, лежат два равных квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ со стороной a, причем $AB \parallel A_1B_1$, AA_1 перпендикулярна β, BB_1 и DD_1 не перпендикулярны β; точка K — середина CD. а) Постройте прямую пересечения плоскости β_1 и плоскости, проходящей через B_1 и перпендикулярной AK. б) Докажите, что BD перпендикулярна плоскости AA_1C_1. в) Найдите расстояния от точки K до плоскостей AA_1B и AA_1C_1. г) Найдите расстояние от прямой BD до плоскости B_1D_1K.

4.118. ♉ В параллельных плоскостях α и α_1, расстояние между которыми c, лежат равные правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со стороной a. Соответственные стороны треугольников попарно параллельны, AA_1 перпендикулярна плоскости α, BB_1 и CC_1 не перпендикулярны α, точка K — середина BC. а) Докажите, что прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости AA_1K. б) Постройте прямую l, проходящую через точку K перпендикулярно плоскости ABB_1. в) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости ABB_1. г) Найдите расстояние от точки A до плоскости BCC_1.

4.119. ♉ Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб с острым углом A, равным α, и стороной a. Известно, что вершина A_1 удалена на расстояние a от точек A, B и D. Докажите, что основание перпендикуляра, проведенного из точки A_1 на плоскость ABC, принадлежит прямой AC. Найдите длину этого перпендикуляра.

4.120. ♉ Расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба равно m. Найдите ребро этого куба.

4.121. ♉ Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через любую точку K ребра AB куба проведена плоскость α, параллельная плоскости BDD_1. Найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью α.

4.122. ♉ Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Точка K — середина ребра BC. Найдите расстояние между прямыми AC и C_1K.

4.123. ♉ В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ высота PO вдвое больше стороны основания $ABCD$. Найдите расстояние между прямыми AB и PC, если сторона основания пирамиды равна 17.

Глава

5 РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Задачи к § 18

5.001. ☺ Прямая AB пересекает плоскость α в точке O; $\rho(A; \alpha) = 4$. Найдите расстояние от точки B до плоскости, если: а) O — середина AB; б) B — середина OA; в) A — середина OB.

5.002. ☺ Прямая AB пересекает плоскость α в точке O; $\rho(A; \alpha) = 4$. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $OA = 8$, $AB = 6$.

5.003. Точки A и B лежат по разные стороны от плоскости α. Расстояния от A и от B до α соответственно равны 7 и 10. В каком отношении (считая от A) плоскость α делит отрезок AB?

5.004. Точки A и B лежат по разные стороны от плоскости α. Расстояния от A и от B до α соответственно равны 7 см и 10 см. Плоскость α пересекает отрезок AB в точке O. Найдите длины отрезков OA и OB, если длина отрезка AB равна 51 см.

5.005. Точки A и B лежат по одну сторону от плоскости α. Расстояния от A и от B до α соответственно равны 7 см и 10 см. Плоскость пересекает прямую AB в точке O. Найдите длины отрезков OA и OB, если длина отрезка AB равна 51 см.

5.006. ☺ Точка M равноудалена от вершин прямоугольника. Равноудалена ли точка M от сторон этого прямоугольника?

5.007. Точка M равноудалена от вершин правильного многоугольника. Равноудалена ли точка M от сторон этого многоугольника?

5.008. ♉ Точка P удалена от каждой вершины правильного треугольника ABC на расстояние $\sqrt{21}$, а от каждой его стороны — на расстояние $2\sqrt{3}$. Найдите: а) расстояние от точки P до плоскости треугольника; б) площадь данного треугольника; в) угол между плоскостями ABP и ABC.

5.009. ☺ Точка K находится на одинаковом расстоянии от каждой из прямых, содержащих стороны ромба $ABCD$, и равноудалена от каждой его вершины. Найдите углы ромба.

5.010. ♉ Вершины A и B квадрата $ABCD$ лежат в плоскости α, а вершина C удалена от этой плоскости на 4. Найдите расстояние до плоскости α от: а) точки D; б) точки O пересечения диагоналей квадрата; в) точки M — середины DO; г) точки K пересечения медиан треугольника ADO; д) точки T пересечения медиан треугольника DOC.

5.011. ☺ Вершины A и B треугольника ABC лежат в плоскости α, а точка M — середина стороны AC, удалена от плоскости α на 6. Найдите расстояние от плоскости α до: а) точки C; б) середины BC; в) середины средней линии треугольника, параллельной BC; г) точки пересечения медиан.

5.012. ☺ Катет AB прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α, а вершина C удалена от этой плоскости на расстояние 8. Найдите расстояние от данной плоскости до центра окружности, описанной около треугольника.

5.013. В треугольнике ABC сторона $AC = 4$, $AB = 6$, $BC = 8$. Вершины A и C лежат в плоскости α, а точка B удалена от этой плоскости на 4. Найдите расстояния до этой плоскости от точек: а) M — середины биссектрисы BB_1; б) A_1, где AA_1 — биссектриса треугольника; в) C_1, где CC_1 — биссектриса треугольника; г) центра вписанной в треугольник окружности.

5.014. ☺ Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 10. Точки A и D лежат в плоскости α, а вершина B удалена от плоскости α на 18. Найдите расстояние от плоскости α до: а) точки C; б) точки пересечения средней линии трапеции с ее диагональю AC; в) точки O пересечения диагоналей трапеции.

5.015. ♉ Вершина D тетраэдра $ABCD$ удалена от плоскости ABC на 6. На какое расстояние от этой плоскости удалены:

а) точка K — середина BD; б) точка M — точка пересечения медиан треугольника ABD; в) точка N пересечения медиан треугольника BCM; г) середина MK; д) точка пересечения медиан треугольника CMK.

5.016. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через вершины A_1, C и B_1. Расстояние от вершины B до плоскости сечения равно 8. Найдите расстояния до плоскости сечения от вершин: A; C_1; D_1.

5.017. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через вершины A_1, C_1 и B. Расстояние от вершины B_1 до плоскости сечения равно 4. Найдите расстояния до плоскости сечения от вершин: A; C; D_1; D.

5.018. ☺ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка M лежит на ребре AB и делит его на отрезки $AM = 3$ и $BM = 5$. Найдите расстояние от точки M до каждой из плоскостей: ADA_1; BCB_1; $A_1B_1C_1$; DCC_1.

5.019. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ его диагонали A_1C и BD_1 пересекаются в точке M. Найдите расстояния от точки M до каждой из плоскостей AB_1D_1 и BC_1D, если ребро куба равно 6.

5.020. ☺ Сторона AB параллелограмма $ABCD$ лежит в плоскости α; K — середина BC. Расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до плоскости α равно 5. Найдите расстояние от точки E до плоскости α, если точка K — середина AE.

Задачи к § 19

5.021. ☺ Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 5. Чему равно расстояние от точки, принадлежащей одной из этих плоскостей, до второй плоскости?

5.022. ☺ Расстояние от точки до каждой из двух параллельных плоскостей равно 6. Найдите расстояние между данными плоскостями.

5.023. ☺ Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 8. Точка удалена от одной из этих плоскостей на 3. На какое расстояние эта точка удалена от второй плоскости?

5.024. ☺ Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 5. Точка удалена от одной из этих плоскостей на 10. На какое расстояние эта точка удалена от второй плоскости?

5.025. ☺ Расстояния от точки до двух параллельных плоскостей равны соответственно 3 и 7. Найдите расстояние между этими плоскостями.

5.026. ☺ Точки A и B принадлежат соответственно двум параллельным плоскостям α и β, расстояние между которыми 6. Длина отрезка AB равна 12. Точка M принадлежит отрезку AB и удалена от плоскости α на 2. Найдите длины отрезков AM и BM.

5.027. Точки A и B принадлежат соответственно двум параллельным плоскостям α и β, расстояние между которыми 10. Длина отрезка AB равна 30. Точка M принадлежит прямой AB и удалена от плоскости α на 2. Найдите длины отрезков AM и BM.

5.028. ♉ Плоскости равностороннего треугольника ABC со стороной 6 и равнобедренного треугольника ABK ($AK = BK = 9$) перпендикулярны. Найдите расстояние между: а) точкой K и центром O треугольника ABC; б) прямыми AB и CK.

5.029. ♉ $ABCD$ — квадрат со стороной 4. Точка M принадлежит стороне CD и делит ее в отношении $3 : 1$, считая от D. Прямая TM перпендикулярна плоскости квадрата. $TM = 4$. Найдите расстояние между прямыми: а) TD и AB; б) TD и BC; в) TC и AD; г) TB и DC.

5.030. ☺ Стороны основания прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны a и b. Найдите расстояние между диагональю BD_1 параллелепипеда и непересекающим ее боковым ребром AA_1.

5.031. ♉ В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром a точки M и K — середины ребер соответственно BP и CP, точка O — центр основания ABC. Найдите расстояние между прямыми: а) MK и OP; б) AP и BC; в) AB и MK.

5.032. ♉ Дан куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ с ребром a. K — середина ребра N_1P_1. Заполните таблицу:

№	Прямые		Расстояние между прямыми
1	MM_1	QP	
2	NN_1	QP_1	
3	QP	M_1K	
4	QQ_1	M_1K	
5	N_1Q	MP	
6	MK	NP	
7	N_1P	P_1Q	
8	MK	NQ	
9	QK	MP_1	

Задачи к § 20

5.033. ☺ Даны пересекающиеся плоскости α и β. Найдите множество всех точек пространства, принадлежащих плоскости α и удаленных на расстояние m от плоскости β.

5.034. ☺ Даны пересекающиеся плоскости α и β. Найдите множество всех точек пространства, каждая из которых удалена от α и β соответственно на расстояния a и b ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

5.035. ☺ Найдите множество всех точек пространства, равноудаленных от трех данных попарно параллельных прямых.

5.036. ☺ Даны плоскость α и не принадлежащие ей точки A и B. На плоскости α найдите множество всех точек, равноудаленных от точек A и B.

5.037. ☺ Сумма двух противоположных углов плоского четырехугольника равна 180°. Найдите множество всех точек пространства, равноудаленных от всех вершин данного четырехугольника.

5.038. ☺ Суммы противоположных сторон плоского четырехугольника равны. Что собой представляет множество всех точек пространства, равноудаленных от прямых, содержащих стороны данного четырехугольника?

5.039. Точка M не принадлежит плоскости α, а точка B принадлежит этой плоскости. Что собой представляет множество оснований всех перпендикуляров, проведенных из точки M ко всем прямым плоскости α, проходящим через точку B?

5.040. Точка A удалена от плоскости α на 4 см. В плоскости α найдите множество всех точек, удаленных от точки A на расстояние, равное 5 см.

5.041. Плоскости α и β перпендикулярны, точка A принадлежит плоскости α и удалена от плоскости β на 8 см. В плоскости β найдите множество всех точек, удаленных от точки A на расстояние, равное 10 см.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 5

5.042. Плоскость α пересекает стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно в точках K (середина AB) и P ($BC : PC = 3$). Расстояние от точки B до этой плоскости равно 6. Найдите расстояния от остальных вершин параллелограмма до плоскости α.

5.043. ♉ Плоскость α, пересекая отрезок AB, делит его в отношении $7 : 5$, считая от точки B. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если расстояние от середины отрезка AB до этой плоскости равно 2.

5.044. ♉ Все вершины куба, кроме двух противоположных A и C_1, лежащих на одной диагонали, одинаково удалены от некоторой плоскости α. Найдите расстояние от каждой из этих вершин (исключая A и C_1) до плоскости α, если ребро куба равно 6.

5.045. ♉ $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Ребро основания пирамиды равно 6, а ее высота равна 4. Найдите расстояние от вершины A до плоскости MDC.

5.046. ♉ Прямая AB перпендикулярна прямой CP, прямая AP перпендикулярна прямой AB. Прямая AP перпендикулярна прямой CP; $AB = AP = CP = 4$. Найдите расстояние между прямыми AP и CB.

5.047. Ребро куба равно a. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими: а) диагональ куба и его ребро; б) диагональ куба и диагональ его грани; в) диагонали двух соседних граней.

5.048. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 10. Точки C и D принадлежат плоскости α, а вершина B удалена от плоскости α на 4. Найдите расстояния от плоскости α до: а) точки A; б) точки пересечения средней линии с диагональю AC; в) точки O пересечения диагоналей трапеции.

5.049. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через точки M, N и K — середины ребер соответственно A_1D_1, C_1D_1 и DD_1. Расстояние от вершины D_1 до плоскости сечения равно 9. Найдите расстояния до плоскости сечения от вершин: A_1; C_1; D; B_1; C; A; B.

5.050. В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром a точка O — центр основания ABC. Найдите расстояние от точки K — середины высоты PO тетраэдра до его грани ABP.

5.051. В основании пирамиды $MABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точка O пересечения диагоналей параллелограмма удалена от плоскости MDC на 6. Найдите расстояние до этой плоскости от: а) точки A; б) точки B; в) точки K, где MK — медиана треугольника AMD; г) точки пересечения медиан треугольника ABC; д) точки пересечения медиан треугольника MBC.

5.052. $ABCD$ — параллелограмм со сторонами $AB = 6$ см и $BC = 14$ см. Сторона AD лежит в плоскости β, расстояние от точки B до β равно 3; M — точка пересечения биссектрис углов A и D параллелограмма. Найдите расстояние от M до β.

5.053. Основанием тетраэдра $PABC$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($AC = BC = a$). Известно, что ребра PA, PB и PC равны b. Найдите расстояние между прямыми AB и CP.

5.054. Дано множество всех плоскостей, проходящих через данную прямую m, и точка A, не принадлежащая этой прямой. Найдите множество точек, являющихся основаниями перпендикуляров, проведенных из точки A ко всем данным плоскостям.

5.055. Плоскости α и β перпендикулярны, точка A удалена от плоскости α на 6 см, а от плоскости β — на 8 см. Найдите в каждой из плоскостей α и β множества всех точек, удаленных от точки A на расстояние, равное 10 см.

5.056. На поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите и постройте множество всех точек, равноудаленных от: а) вершин A и B; б) вершин A и C; в) вершин B и D_1; г) точки пересечения диагоналей грани $ABCD$ и середины ребра A_1B_1.

5.057. На поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите и постройте множество всех точек, удаленных от вершины A на расстояние, равное длине ребра куба.

5.058. На поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите и постройте множество всех точек, удаленных от ребра AB на расстояние, равное половине длины ребра куба.

5.059. На поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите и постройте множество всех точек, равноудаленных от плоскостей: а) ABC и ABC_1; б) ABC_1 и A_1CD.

5.060. На поверхности тетраэдра $ABCD$ найдите и постройте множество всех точек, равноудаленных от: а) вершин A и B; б) середины ребра AC и вершины D; в) плоскостей DAC и BAC.

5.061. На поверхности правильного тетраэдра $ABCD$ найдите и постройте множество всех точек, удаленных от вершины A на расстояние, равное половине длины ребра тетраэдра.

5.062. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник ACM, если точка M принадлежит прямой B_1D_1?

5.063. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник BDT, если точка T принадлежит прямой A_1C? Найдите эту площадь.

5.064. ♉ Ребро правильного тетраэдра $MABC$ равно a. Точка K — середина ребра AC. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник MKT, если точка M лежит на прямой DC_1?

5.065. ♉ В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AA_1 = a$, $AB = 3a$ и $AD = 4a$. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AD_1M, если точка T лежит на ребре AB?

5.066. ♉ Ребро основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно a. Боковое ребро призмы равно $2a$; точка P — середина ребра BB_1. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AB_1K, если точка K лежит на прямой CP? Найдите эту площадь.

5.067. Все вершины тетраэдра находятся на одинаковом расстоянии от плоскости. Сколько существует таких плоскостей?

5.068. Точка M удалена на расстояние $4\sqrt{2}$ от каждой из трех вершин квадрата со стороной 8. Докажите, что точка M принадлежит плоскости этого квадрата.

5.069. ♉ Точка A принадлежит окружности радиуса 1. Отрезок AB длины 2 перпендикулярен плоскости этой окружности; C — такая точка окружности, что длина дуги AC равна x $(0 < x \leqslant \pi)$. Задайте функцию расстояния между точками B и C от x.

5.070. ♉ $ABCD$ — прямоугольник со сторонами $AB = 3$ и $BC = 4$. Треугольники ABC и ADC вращаются вокруг диагонали AC. В каких пределах изменяется длина отрезка BD?

5.071. Трапецию $ABCD$ со сторонами $AB = BC = CD = 6$ и $AD = 12$ перегнули по диагонали AC так, что вершина D оказалась вне плоскости данной трапеции. Может ли при этом расстояние между точками B и D быть равным: а) 7; б) 5; в) 10; г) 11?

Глава 6

ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ

Задачи к § 21

6.001. ☺ Может ли длина суммы двух векторов быть: а) меньше длины каждого из слагаемых; б) равной сумме длин слагаемых; в) больше суммы длин слагаемых? Ответ обоснуйте.

6.002. (*Устно.*) ☺ Дан тетраэдр $PABC$. Точки K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 — середины ребер соответственно PC, PB, PA, AB, BC, AC. Назовите все векторы: 1) равные вектору: а) $\overrightarrow{K_1K_2}$; б) $\overrightarrow{K_3K_4}$; в) $\overrightarrow{K_2K_5}$; 2) противоположные вектору: а) $\overrightarrow{K_4K_5}$; б) $\overrightarrow{K_3K_6}$; в) $\overrightarrow{K_4K_6}$.

6.003. ☺ Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{B_1B}$; г) $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DB}$; д) $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{BC}$; е) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{CC_1}$; ж) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{B_1A}$.

6.004. Начертите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и обозначьте $\overrightarrow{C_1D_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Изобразите на рисунке векторы: а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{b} - \vec{a}$; в) $\vec{a} - \vec{c}$; г) $\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$; д) $\vec{c} + \vec{b} - \vec{a}$; е) $-\vec{a} - \vec{b}$.

6.005. ☺ Упростите выражение: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{HM}$; б) $\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{EM} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{PC}$; в) $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MP}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{HM}$.

6.006. (*Устно.*) Даны точки A, B, C, E. Представьте вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде линейной комбинации следующих векторов: а) $\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BE}$; б) $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$.

6.007. Дан параллелограмм $ABCD$, O — произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

6.008. ☺. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O — произвольная точка пространства. Докажите, что: а) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}$; б) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD_1}$.

6.009. Докажите, что $\overrightarrow{M_1A} - \overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{M_2A} - \overrightarrow{M_2B}$.

6.010. (*Устно.*) $PABC$ — тетраэдр с вершиной P. Найдите точку M, если: а) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$; б) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP}$; г) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}$; д) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}$; е) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PB}$.

6.011. ☺ Известно, что $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO}$. Докажите, что точки A и B симметричны относительно точки O.

6.012. O — точка пересечения диагоналей куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите число x такое, что: а) $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC_1} = x\overrightarrow{AO}$; в) $\overrightarrow{OB_1} = x\overrightarrow{DB_1}$; г) $\overrightarrow{B_1O} = x\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{A_1C} = x\overrightarrow{CO}$.

6.013. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Докажите, что коллинеарны векторы: а) $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{c}$; г) $-3\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{c}$.

6.014. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

6.015. ☺ Докажите, что если точка M — середина отрезка AB, а O — произвольная точка пространства, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

6.016. ♉ Докажите, что если точка M — центроид треугольника ABC, то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

6.017. ☺ Докажите, что если точка M — центроид треугольника ABC, а O — произвольная точка пространства, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

6.018. ♉ В тетраэдре $PABC$ точки M_1 и M_2 — центроиды граней соответственно PAB и PBC. Докажите, что $M_1M_2 \parallel AC$ и $M_1M_2 = \frac{1}{3}AC$.

6.019. (*Устно.*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 — середины ребер соответственно AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, AB, C_1D_1. Назовите векторы: 1) равные вектору $\overrightarrow{K_1K_5}$; б) $\overrightarrow{K_3B}$; в) $\overrightarrow{BC_1}$; г) $\overrightarrow{K_4K_5}$; д) $\overrightarrow{K_4K_6}$; е) $\overrightarrow{AK_3}$; 2) противоположные векторы: а) $\overrightarrow{K_4K_6}$; б) $\overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{K_2C_1}$; г) $\overrightarrow{D_1K_2}$; д) $\overrightarrow{K_1C_1}$; е) $\overrightarrow{CK_1}$.

6.020. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ равна сумме векторов $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{PC}$, где точка O — центр основания пирамиды.

6.021. ☺ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Начертите вектор $\overrightarrow{AM}$, если:

а) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1}$; б) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CC_1}$; г) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$; д) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$; е) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{AC}$; ж) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{C_1D_1}$; з) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1A_1}$; и) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{CC_1}$; к) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{AB}$; л) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A_1A}$; м) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{C_1D_1} - \overrightarrow{A_1C_1}$; н) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{C_1D_1} - \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CA}$.

6.022. ☺ Начертите тетраэдр $PABC$ и постройте направленный отрезок, задающий вектор: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP}$; в) $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$; г) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$; е) $-\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BC}$; ж) $-\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BC}$.

6.023. $ABCA_1B_1C_1$ — призма. Укажите точку M, если: а) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$; б) $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{AA_1}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{B_1C_1}$.

6.024. ♉ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Укажите такую точку M, что справедливо равенство: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = \vec{0}$.

6.025. $PABC$ — тетраэдр. Постройте такую точку M, что справедливо равенство $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PM} = \vec{0}$.

6.026. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. С помощью этого параллелепипеда убедитесь в справедливости следующих векторных равенств: а) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{b}$; б) $\vec{a} + (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{a} - \vec{c}) + \vec{b}$; в) $\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c}) - \vec{b}$; г) $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{c} = (\vec{a} - \vec{c}) - \vec{b}$.

6.027. ♉ Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ произвольно расположены в пространстве. Верно ли, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1}$?

6.028. ☺ Векторы $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{a} + 3\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

6.029. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На диагонали AC грани $ABCD$ взята такая точка M, что $AM : MC = 1 : 4$, а на диагонали AC_1 параллелепипеда — такая точка N, что $AN : NC_1 = 1 : 5$. Докажите, что точки M, N и A_1 лежат на одной прямой. Найдите отношение, в котором точка N делит отрезок MA_1.

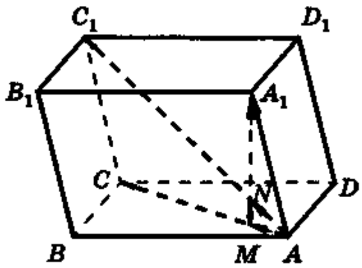


Рис. 52

Решение. Для доказательства принадлежности трех точек M, N и A_1 одной прямой достаточно показать, что векторы $\overrightarrow{MA_1}$ и $\overrightarrow{MN}$ коллинеарны, т. е. $\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{MA_1}$ (рис. 52).

Пользуясь условием задачи, находим: $AM : MC = 1 : 4 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$; $AN : NC_1 = 1 : 5 \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC})$. Тогда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{30}(5\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC})$. Далее, $\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{5}(5\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC})$. Таким образом, получили: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{30}(5\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{MA_1} = \frac{1}{5}(5\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC})$, откуда следует $\overrightarrow{MA_1} = 6\overrightarrow{MN}$. Это означает, что точки M, N и A_1 лежат на одной прямой и $MN : NA_1 = 1 : 5$.

6.030. ♉ Для данной неплоской замкнутой ломаной, состоящей из шести звеньев, построены два треугольника, вершинами каждого из которых служат середины несмежных звеньев. Докажите, что центроиды этих треугольников совпадают.

Задачи к § 22

6.031. ☺ В параллелограмме $ABCD$ точки K и P делят стороны AB и AD на части в отношении $AK : KB = AP : PD = 1 : 4$. Выразите вектор $\overrightarrow{KP}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

6.032. К центру правильного шестиугольника приложены три силы, направленные в три последовательные вершины. Найдите величину и направление равнодействующей, если величина каждой из данных сил равна $2H$.

6.033. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Пусть $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{b}$. Разложите по базису $(\vec{a}; \vec{b})$ следующие векторы: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{DE}$; е) $\overrightarrow{AE}$; ж) $\overrightarrow{FC}$; з) $\overrightarrow{EF}$; и) $\overrightarrow{DB}$; к) $\overrightarrow{BE}$.

6.034. Пусть $\overrightarrow{MK}$ — равнодействующая трех сил, приложенных в точке M и равных $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$, где A, B и C — вершины правильного треугольника, вписанного в окружность с центром O. Найдите отношение длин отрезков MK и MO.

6.035. (*Устно.*) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какие из следующих троек векторов компланарны: а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BB_1}$; в) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$; д) $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{AB}$; е) $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{AD}$?

6.036. ☺ Основанием пирамиды с вершиной P является параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O; точка E — середина ребра PC. Разложите векторы $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{EO}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$.

6.037. ☺ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. В базисе $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ найдите координаты следующих векторов: а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$; г) $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{A_1C}$; е) $\overrightarrow{D_1B}$.

6.038. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в пространстве. Будут ли образовывать базис пространства векторы: а) $x\vec{a}$, $y\vec{b}$, $z\vec{c}$; б) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{a}$?

6.039. ☺ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед; O — центр основания $ABCD$. Обозначим $\overrightarrow{A_1A} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1D} = \vec{c}$. Разложите в базисе $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ следующие векторы: а) $\overrightarrow{A_1O}$; б) $\overrightarrow{AO}$; в) $\overrightarrow{CA_1}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$; д) $\overrightarrow{D_1B}$; е) $\overrightarrow{C_1B}$.

6.040. ☺ $PABC$ — правильный тетраэдр. Точки K и M — середины ребер соответственно PC и BC; H и E — центроиды треугольников соответственно ABC и PBC. Обозначим $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$. В базисе $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ найдите координаты векторов: а) $\overrightarrow{BK}$; б) $\overrightarrow{PM}$; в) $\overrightarrow{PH}$; г) $\overrightarrow{AE}$; д) $\overrightarrow{KH}$.

6.041. Точки M и M_1 — центроиды треугольников соответственно ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{MM_1}$.

6.042. Даны параллелограммы $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. (A — общая вершина.) Докажите, что при любом их взаимном расположении прямые BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны некоторой плоскости.

6.043. ♉ В наклонной треугольной призме проведено сечение, пересекающее все ее боковые ребра. Докажите, что центроиды сечения и оснований призмы лежат на одной прямой.

6.044. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Докажите, что центроид M треугольника ACD_1 принадлежит диагонали B_1D и делит ее в отношении $1:2$, считая от вершины D.

Решение. Для решения задачи достаточно убедиться, что векторы $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{DB_1}$ (рис. 53) коллинеарны (почему?).

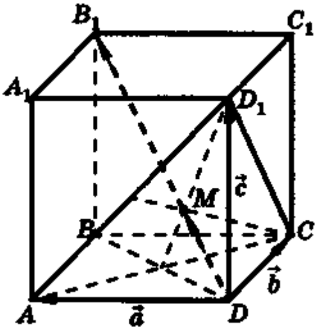


Рис. 53

Введем базис $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DD_1}$ и найдем разложение векторов $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{DM}$ по этому базису.

По правилу параллелепипеда имеем

$$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}. \quad (1)$$

Так как точка M — центроид треугольника ACD_1, то

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB_1}$, поэтому векторы $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{DB_1}$ коллинеарны и сонаправлены. Это означает, что точка M принадлежит диагонали DB_1 и $DM : DB_1 = 1 : 3$, откуда $DM : MB_1 = 1 : 2$, что и требовалось доказать.

6.045. ♉ Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки P, H и K — середины ребер соответственно A_1D_1, CC_1 и AB. Докажите, что плоскость HPK проходит через точку O пересечения диагоналей параллелепипеда.

6.046. ♉ Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки M, P, K и H — середины отрезков соответственно AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Докажите, что отрезки MK и PH пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

6.047. ♉ В тетраэдре $PABC$ точки K и M — середины ребер соответственно PA и BC. Докажите, что прямые AB, KM и PC параллельны некоторой (одной) плоскости.

6.048. ♉ Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны, точка K лежит в плоскости треугольника ABC. Найдите значение числа x, если: а) $\overrightarrow{MK} = 0{,}1\overrightarrow{MA} + 0{,}4\overrightarrow{MB} + x\overrightarrow{MC}$; б) $\overrightarrow{MK} = 7\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + 0{,}38\overrightarrow{MC}$.

Для каждого найденного значения x определите: лежит точка K внутри треугольника или нет.

6.049. ♉ Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны. Определите взаимное расположение отрезка MK и плоскости ABC, если: а) $\overrightarrow{MK} = 0{,}3\overrightarrow{MA} + 0{,}4\overrightarrow{MB} + 0{,}2\overrightarrow{MC}$; б) $\overrightarrow{MK} = 0{,}37\overrightarrow{MA} + 0{,}25\overrightarrow{MB} + 0{,}38\overrightarrow{MC}$; в) $\overrightarrow{MK} = 0{,}7\overrightarrow{MA} - 0{,}4\overrightarrow{MB} + 0{,}8\overrightarrow{MC}$; г) $\overrightarrow{MK} = 0{,}38\overrightarrow{MA} + 0{,}43\overrightarrow{MB} - 0{,}81\overrightarrow{MC}$.

6.050. ☺ Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны. Известно, что $\overrightarrow{MK} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. В каком отношении плоскость ABC делит отрезок MK, считая от M?

6.051. Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны. Известно, что $\overrightarrow{MK} = 5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$. В каком отношении плоскость ABC делит отрезок MK, считая от M?

6.052. ☺ Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны. Известно, что $\overrightarrow{MK} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 8\overrightarrow{MC}$. В каком отношении плоскость ABC делит отрезок MK, считая от M?

6.053. Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны. Известно, что $\overrightarrow{MK} = 0{,}3\overrightarrow{MA} + 0{,}07\overrightarrow{MB} + 0{,}13\overrightarrow{MC}$. Прямая MK пересекает плоскость ABC в точке T. Найдите отношение длин отрезков MK и TK.

6.054. ☺ Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны. Известно, что $\overrightarrow{MK} = 1{,}3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 0{,}9\overrightarrow{MC}$. Прямая MK пересекает плоскость ABC в точке T. Найдите отношение длин отрезков MT и MK.

6.055. Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны. Известно, что $\overrightarrow{MK} = 0{,}3\overrightarrow{MA} + 0{,}7\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. Прямая MK пересекает плоскость ABC в точке T. Найдите отношение длин отрезков MK и TK.

6.056. ☺ O — точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Разложите вектор $\overrightarrow{AO}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. б) В каком отношении плоскость A_1BD делит отрезок AO, считая от O?

6.057. ☺ На продолжении ребер MA, MB и MC правильного тетраэдра $MABC$ взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 такие, что A — середина MA_1, $MB_1 = 3MB$ и $MC_1 = 1{,}5MC$. K —

центроид (точка пересечения медиан) треугольника $A_1B_1C_1$. а) Разложите вектор $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$. б) В каком отношении плоскость ABC делит отрезок MK, считая от M? в) Найдите расстояние от точки K до плоскости ABC, если ребро тетраэдра равно a.

Задачи к § 23

п. 23.1—23.3

6.058. (*Устно.*) В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 53°, а угол ADB равен 62°. Найдите углы между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AD}$; д) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CD}$; е) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$.

6.059. ☺ Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$; в) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB_1}$; г) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{CB_1}$; д) $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$; е) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DC_1}$.

6.060. Основанием четырехугольной пирамиды $PABCD$ служит квадрат $ABCD$, каждое боковое ребро пирамиды равно стороне квадрата. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PB}$; б) $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PC}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{BD}$.

6.061. (*Устно.*) Какой знак имеет скалярное произведение двух векторов, если угол между ними: а) острый; б) тупой?

6.062. Определите вид угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их скалярное произведение: а) равно нулю; б) больше нуля; в) меньше нуля.

6.063. ☺ Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их длины и угол между ними равны соответственно: а) 4; 5; 60°; б) 2; 7; $\frac{\pi}{4}$; в) 4; 5; 120°; г) 7; 9; 90°; д) 14; 0,35; 180°; е) 2; 2; 0.

6.064. *ABCDEF* — правильный шестиугольник с центром *O* и стороной 2. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$; г) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$.

6.065. Для данных ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ известно, что $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Докажите, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, и выясните геометрический смысл данного равенства.

6.066. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны, используя векторы.

6.067. ♉ В тетраэдре *PABC* ребра *AP* и *BC*, а также *AB* и *CP* взаимно перпендикулярны. Докажите перпендикулярность ребер *AC* и *BP*, используя векторы.

6.068. ♉ Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — единичные; $\widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 30°$, $\widehat{(\vec{a}; \vec{c})} = 45°$, $\widehat{(\vec{b}; \vec{c})} = 60°$. Вычислите скалярные произведения: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a} \cdot \vec{c}$; в) $\vec{b} \cdot \vec{c}$; г) $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a}$; д) $(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})$; е) $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$; ж) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; з) $(3\vec{b} - \vec{c}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b})$.

6.069. ☺ Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$; б) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$; в) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; г) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$; д) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |\vec{a} - 2\vec{b}| = p$.

6.070. ☺ Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — единичные; $\widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 90°$, $\widehat{(\vec{a}; \vec{c})} = 90°$, $\widehat{(\vec{b}; \vec{c})} = 120°$. Найдите длины векторов: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $4\vec{a} + 3\vec{c}$; в) $5\vec{b} + 3\vec{c}$; г) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$; д) $-\vec{a} - 4\vec{b} + 3\vec{c}$.

6.071. Длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ соответственно равны 2; 4; 1; $\widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 60°$, $\widehat{(\vec{a}; \vec{c})} = 60°$, $\widehat{(\vec{b}; \vec{c})} = 90°$. Найдите длины векторов: а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{b} + 2\vec{c}$; в) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; г) $\vec{a} - 0{,}5\vec{b} + \vec{c}$.

6.072. Длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ соответственно равны 1; 2; 2; $\widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 90°$, $\widehat{(\vec{a}; \vec{c})} = 120°$, $\widehat{(\vec{b}; \vec{c})} = 120°$. При каких значениях x вектор $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a} + \vec{b} - x \cdot \vec{c}$?

6.073. Пусть $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ — нуль-вектор и длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны соответственно 3; 1 и 4. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

6.074[1]**.** Найдите скалярное произведение векторов $-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ и $7\vec{a} + 7\vec{b} - 4\vec{c}$.

6.075. Найдите косинусы углов между вектором $6\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ и каждым из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

6.076. ♉ Найдите разложение вектора $\vec{m}$ в базисе $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$, если длина этого вектора равна 2, а углы между ним и векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$ соответственно равны 60° и 120°.

6.077. Координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в базисе $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ равны соответственно (4; 0; 5) и (7; 1; 3). Найдите координаты единичного вектора, сонаправленного с вектором $\vec{q} - \vec{p}$.

6.078. Определите: при каких значениях x векторы $x\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ и $\vec{a} + 2\vec{b} - x\vec{c}$ ортогональны?

6.079*. ♉ Найдите координаты вектора $\vec{m}$ в базисе $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$, если он ортогонален векторам $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{q} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$ и образует с вектором $\vec{c}$ острый угол, причем $|\vec{m}| = \sqrt{3}$.

6.080. ♉ Единичный вектор $\vec{m}$ перпендикулярен вектору $4\vec{b} - 3\vec{c}$ и вектору $\vec{n}$, образующему с базисными векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ углы, соответственно равные $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$ в этом базисе, если $\vec{m} \cdot \vec{a} > 0$.

6.081. ♉ а) Следует ли из $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, что $\vec{b} = \vec{c}$? б) Известно, что для любого вектора $\vec{p}$ верно $\vec{a} \cdot \vec{p} = \vec{b} \cdot \vec{p}$. Верно ли, что $\vec{a} = \vec{b}$?

---

[1] В задачах № 6.074—6.080 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — единичные и попарно взаимно перпендикулярные.

(Если вы считаете, что «верно», то докажите утверждение, в противном случае — приведите опровергающий пример.)

6.082. ☺ Треугольник ABC является основанием правильного тетраэдра $PABC$ с ребром a; точки M, K, H — середины ребер соответственно AP, CP, AB. Вычислите скалярные произведения: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BP}$; в) $\overrightarrow{KH}\cdot\overrightarrow{KB}$; г) $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{BC}$; е) $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{BC}$.

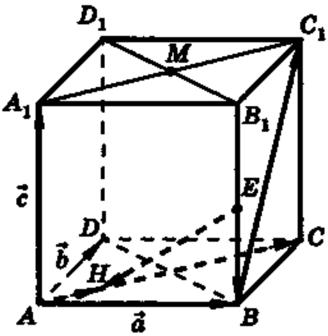


Рис. 54

6.083. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 2. Точка M — центр основания $A_1B_1C_1D_1$. Точки E и H взяты соответственно на отрезках BB_1 и AC так, что $BE : BB_1 = 1 : 2$, $AH : AC = 1 : 4$. Найдите: 1) длину отрезка: а) AM; б) EH; в) MH; 2) угол между векторами: а) $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{BD_1}$; в) $\overrightarrow{HM}$ и $\overrightarrow{CB_1}$ (рис. 54).

Решение. Введем базис $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$. Так как грани куба — равные квадраты со стороной 2, то

$$\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=4,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0. \qquad (*)$$

Рассмотрим некоторые случаи.

1. б) Длина отрезка EH равна длине вектора $\overrightarrow{EH}$. Разложим вектор $\overrightarrow{EH}$ по базису $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$. По правилу ломаной $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}+\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$. Тогда $|\overrightarrow{EH}|^2=\overrightarrow{EH}^2=\left(-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)^2=\frac{9}{16}\vec{a}^2+\frac{1}{16}\vec{b}^2+\frac{1}{4}\vec{c}^2-\frac{3}{8}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}$. Учитывая (*), получаем $|\overrightarrow{EH}|^2=\frac{9}{16}\cdot4+\frac{1}{16}\cdot4+\frac{1}{4}\cdot4=\frac{7}{2}$, откуда $|\overrightarrow{EH}|=\sqrt{\frac{7}{2}}$. Следовательно, $EH=\sqrt{\frac{7}{2}}$.

2. а) Обозначим $(\widehat{\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{AC}}) = \varphi$. Тогда $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$.

Находим: $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AC} = (\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}^2 + \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}$.

Учитывая (*), получаем $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AC} = \vec{b}^2 = 4$.

$$\left|\overrightarrow{BC_1}\right| = \sqrt{(\vec{b}+\vec{c})^2} = \sqrt{\vec{b}^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}^2} = \sqrt{4+2\cdot 0+4} = 2\sqrt{2};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2} = 2\sqrt{2}.$$

Получаем

$$\cos\varphi = \frac{4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \text{откуда } \varphi = 60^\circ.$$

Ответ: 1. б) $\sqrt{\dfrac{7}{2}}$; 2. а) 60°.

6.084. ☺ Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ имеют длину, равную 1. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{DK}$, где точки M и K — середины ребер соответственно BC и CP.

6.085. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равны 1. Точка O — центр грани $ABCD$. Точки E, F, H — середины ребер соответственно BP, CP, AP. Найдите: а) длину отрезка OP; б) длину отрезка CH; в) угол между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BF}$; г) угол между медианой PM грани BPC и высотой AE грани APB (рис. 55), используя векторы.

Решение пунктов а) и в). Введем базис $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BP} = \vec{c}$. Так как боковые грани пирамиды — правильные треугольники, а основание — квадрат, то $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $(\widehat{\vec{a};\vec{c}}) = (\widehat{\vec{b};\vec{c}}) = 60^\circ$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 90^\circ$.

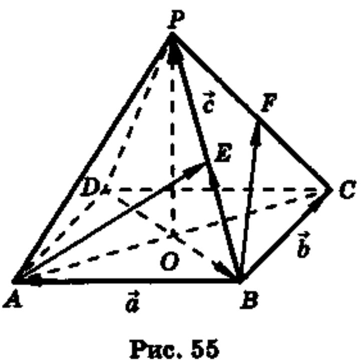


Рис. 55

Поэтому имеем

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2},\ \vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2},\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0. \quad (*)$$

а) Длина отрезка OP равна длине вектора $\overrightarrow{OP}$. Разложим этот вектор по базису $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$.

По правилу треугольника $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BP}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$. Значит, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{BP}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$. Тогда $|\overrightarrow{OP}|^2=\overrightarrow{OP}^2=\left(-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\frac{1}{4}\vec{a}^2+\frac{1}{4}\vec{b}^2+\vec{c}^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$. Учитывая (*), получаем $|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{2}$, откуда $|\overrightarrow{OP}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $OP=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) Пусть $\widehat{(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF})}=\varphi$. Тогда $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BF}|}$. Разложим векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BF}$ по базису $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$. Имеем: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BP})=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$.

Находим:

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=(-\vec{a}+0{,}5\vec{c})\cdot(0{,}5\vec{b}+0{,}5\vec{c})=$$
$$=-0{,}5\vec{a}\cdot\vec{b}-0{,}5\vec{a}\cdot\vec{c}+0{,}25\vec{b}\cdot\vec{c}+0{,}25\vec{c}^2;$$
$$|\overrightarrow{AE}|^2=(-\vec{a}+0{,}5\vec{c})^2=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{c}+0{,}25\vec{c}^2;$$
$$|\overrightarrow{BF}|^2=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c})^2=\frac{1}{4}(\vec{b}^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}^2).$$

Принимая во внимание (*), получаем: $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0{,}125$, $|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{BF}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому $\cos\varphi=\dfrac{0{,}125}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{6}$, значит, $\varphi=\arccos\frac{1}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\arccos\frac{1}{6}$.

6.086. В правильном тетраэдре $PABC$ точки M и K — середины ребер соответственно AP и BC. Докажите, что отрезок MK перпендикулярен каждому из отрезков AP и BC.

6.087. $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Точка O — центроид основания ABC; точки H, E и K — середины ребер соответственно BC, CP и AB. Найдите: 1) длину отрезка: а) PO; б) KE; 2) угол между векторами: а) $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PH}$; б) $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{BE}$; в) $\overrightarrow{HP}$ и $\overrightarrow{CK}$.

6.088. ☺ $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Точка O — центр основания ABC; точки M, E и F — середины ребер соответственно BC, PC и BP. Найдите: 1) длину отрезка OE; 2) угол между: а) медианами AM и PM граней ABC и PBC; б) векторами $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{BE}$.

6.089. ♉ В правильном тетраэдре $PABC$ на ребре PC взята точка E такая, что $PE : EC = 1 : 2$, и на медиане AF грани APB отмечена точка M — центроид грани APB. Найдите длину отрезка ME, если длина ребра тетраэдра равна a.

6.090. ♉ В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна a, высота BB_1 равна h. Найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

п. 23.4

6.091. Все плоские углы четырехгранного угла $MABCD$ равны между собой; векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$ — единичные. Выразите вектор $\overrightarrow{MD}$ через $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$.

Решение. Так как $ABCD$ — параллелограмм (рис. 56, *а*), то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$, где O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Тогда $\overrightarrow{MD} = 1 \cdot \overrightarrow{MA} - 1 \cdot \overrightarrow{MB} + 1 \cdot \overrightarrow{MC}$.

6.092. Все плоские углы шестигранного угла $MABCDEF$ равны. Пусть $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MF}$ — единичные векторы.

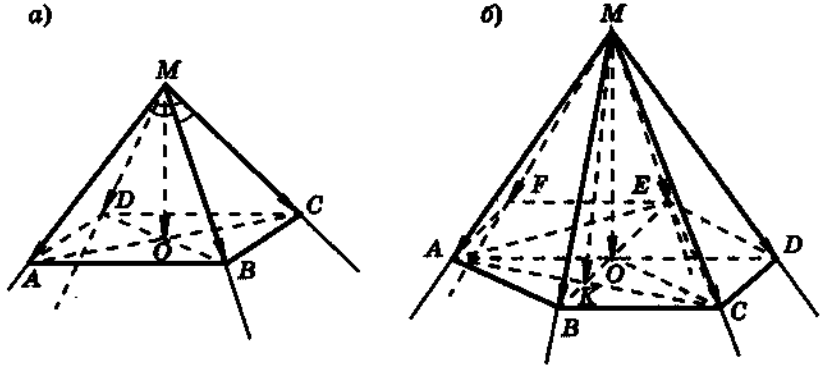


Рис. 56

Выразите: а) векторы $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MF}$ через векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$; б) векторы $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MF}$ через векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{ME}$.

Решение. а) Пусть точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 56, б); K — точка пересечения диагоналей ромба $ABCO$. Тогда $2\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$, откуда $\overrightarrow{MO} = 1 \cdot \overrightarrow{MA} - 1 \cdot \overrightarrow{MB} + 1 \cdot \overrightarrow{MC}$.

Из равенств $2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}$ находим:

$$\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC};$$

$$\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC};$$

$$\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}.$$

б) Точка O — центроид треугольника ACE. Значит, $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME})$. Тогда из равенств $2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF}$ находим:

$$\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ME};$$

$$\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{ME} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{ME};$$

$$\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{MC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ME}.$$

6.093. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ точка F — середина ребра MB, K — такая точка ребра MD, что $MK = 5KD$. В каком отношении плоскость AFK делит: а) ребро MC; б) высоту MO данной пирамиды?

Решение. а) Выберем пространственный базис: $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{MD}$ (рис. 57). Тогда $2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$, откуда

$$\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}. \qquad (1)$$

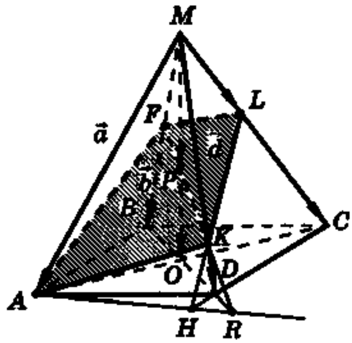


Рис. 57

Обозначим $L = MC \cap (AFK)$. Так как точка L лежит в плоскости AFK, то

$$\overrightarrow{ML} = x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MF} + z \cdot \overrightarrow{MK},$$

где

$$x + y + z = 1. \qquad (2)$$

Учитывая условие задачи, получаем

$$\overrightarrow{ML} = x \cdot \vec{a} + \frac{1}{2}y \cdot \vec{b} + \frac{5}{6}z \cdot \vec{d}. \qquad (3)$$

Из условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{ML}$ имеем:

$$\overrightarrow{ML} = t \cdot \overrightarrow{MC} \Rightarrow x = -t,\ \frac{1}{2}y = t,\ \frac{5}{6}z = t \Rightarrow x = -t,\ y = 2t,\ z = \frac{6}{5}t,$$

где t — коэффициент пропорциональности.

Из условия (2) находим значение t:

$$-t + 2t + \frac{6}{5}t = 1 \Rightarrow -5t + 10t + 6t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{11}.$$

Тогда $\frac{ML}{MC} = \frac{5}{11} \Rightarrow \frac{ML}{LC} = \frac{5}{6}$.

б) Обозначим $P = MO \cap (AFK)$. Точка O — середина BD, значит, $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d})$. Так как точки K, F и P лежат на одной прямой, то

$$\overrightarrow{MP} = m\overrightarrow{MF} + n\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}m\vec{b} + \frac{5}{6}n\vec{d}, \text{ где } m + n = 1. \qquad (4)$$

Из коллинеарности векторов $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MO}$ имеем: $\overrightarrow{MP} = u\overrightarrow{MO} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}u$, $\frac{5}{6}n = \frac{1}{2}u$ или $m = u$, $n = \frac{3}{5}u$. Из условия (4) получаем $u + \frac{3}{5}u = 1$ или $8u = 5$, откуда $u = \frac{5}{8}$. Это означает, что $MP : MO = 5 : 8$ или $MP : PO = 5 : 3$.

Ответ: а) 5 : 6; б) 5 : 3.

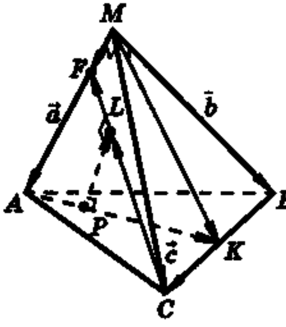


Рис. 58

6.094. В тетраэдре $MABC$ боковые ребра MA, MB и MC попарно взаимно перпендикулярны и $MA = 1$, $MB = 2$, $MC = 3$; K — середина BC; F — внутренняя точка ребра AM такая, что $AF : FM = 3 : 1$. Найдите расстояние между прямыми AK и CF (рис. 58).

Решение. В качестве базисных примем векторы $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{MC}$. Имеем: $\overrightarrow{AK} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\vec{a} + 0 \cdot \vec{b} - \vec{c}$.

Пусть PL — общий перпендикуляр прямых AK и CF, где $P \in AK$, $L \in CF$. Тогда $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CL} = x\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC} + y\overrightarrow{CF} =$

$$= -x\vec{a} + \frac{1}{2}x\vec{b} + \frac{1}{2}x\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} + y\left(-\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{a}\right) =$$

$$= \left(-x + \frac{1}{4}y\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}\right)\vec{c}. \qquad (1)$$

Коэффициенты разложения (1) вектора $\overrightarrow{PL}$ по базису $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ найдем из условия перпендикулярности PL к прямым AK и CF.

Имеем:

$$\begin{cases} PL \perp AK \Rightarrow \overrightarrow{PL} \cdot \overrightarrow{AK} = 0, \\ PL \perp CF \Rightarrow \overrightarrow{PL} \cdot \overrightarrow{CF} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ \frac{1}{4}\left(-x + \frac{1}{4}y\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \left(\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ -12x + 17y = 8 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = \frac{4}{11}, \\ y = \frac{8}{11}. \end{cases}$$

Тогда, подставив в (1) вместо x и y их найденные значения, получаем: $\overrightarrow{PL} = -\frac{1}{22}(4\vec{a} + 7\vec{b} + \vec{c})$. Значит,

$$|PL| = |\overrightarrow{PL}| = \frac{1}{22}\sqrt{16 \cdot 1 + 49 \cdot 4 + 9} = \frac{1}{22}\sqrt{221}.$$

Ответ: $\frac{1}{22}\sqrt{221}$.

6.095. На ребрах MA, MB и AC тетраэдра $MABC$ отмечены соответственно такие точки K, F и T, что $AK : KM = 1 : 2$, F — середина BM, T — середина AC; $KF = 3$. Точки P и Q принадлежат соответственно прямым KF и BT, при этом $PQ \parallel AM$ (рис. 59). Найдите длину отрезка KP.

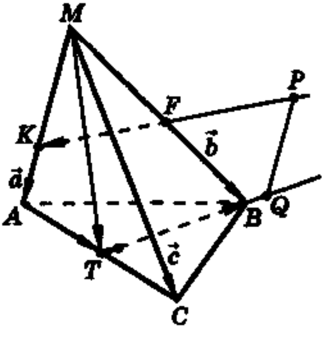


Рис. 59

Решение. Выберем векторы $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{MC}$ в качестве базисных. По правилу ломаной $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TQ}$. Имеем: $AK : KM = 1 : 2 \Rightarrow \overrightarrow{KA} = \frac{1}{3}\vec{a}$; $P \in KF \Rightarrow \overrightarrow{PK} =$

$= x\overrightarrow{KF} = x\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}\right); AT = TC \Rightarrow \overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}); Q \in TB \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{TQ} = y\overrightarrow{TB} = -y\overrightarrow{BT} = -y(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MT}) = -y\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}\right).$

Тогда

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\vec{a} + x\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{a}\right) - y\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2}x + y\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\left(1 - y\right)\vec{c}. \qquad (*)$$

Так как $PQ \parallel AM$, то векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$ коллинеарны. Следовательно, координаты $\frac{1}{2}x + y$ и $\frac{1}{2}(1 - y)$ в разложении (*) вектора $\overrightarrow{PQ}$ в базисе $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ должны быть одновременно равны нулю, т. е.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0, \\ 1 - y = 0, \end{cases}$$

откуда $x = -2$, $y = 1$. Тогда $\overrightarrow{PK} = x\overrightarrow{KF} = -2\overrightarrow{KF}$ или $\overrightarrow{KP} = 2\overrightarrow{KF}$. Значит, $|KP| = |\overrightarrow{KP}| = |-2\overrightarrow{KF}| = 6$. Это означает, что точка F — середина отрезка KP.

Ответ: 6.

6.096. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки P, M и Q выбраны на ребрах соответственно AA_1, AB и AD так, что $AP = PA_1 = 3 : 1$, $AQ : QD = 1 : 4$, $AM = MB$ (рис. 60). В каком отношении плоскость PMQ делит диагональ AC_1 параллелепипеда?

Решение. Примем в качестве базисных векторы $\overrightarrow{AP} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

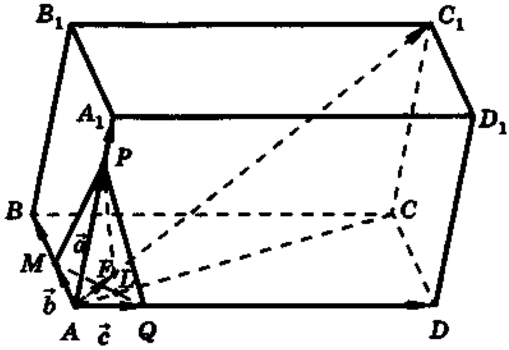


Рис. 60

Тогда $\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = 5\vec{c}$; $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}$.

Пусть $F = AC_1 \cap (PMQ)$. Для точек M, P, Q и F, принадлежащих одной плоскости, имеем

$$\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AP} + y\overrightarrow{AM} + z\overrightarrow{AQ} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c},$$

где

$$x + y + z = 1. \qquad (*)$$

Так как $\overrightarrow{AF} \parallel \overrightarrow{AC_1}$, то одноименные координаты этих векторов пропорциональны, т. е. $x = \frac{4}{3}t$, $y = 2t$, $z = 5t$. Подставляя эти значения x, y и z в левую часть соотношения (*), получаем $\frac{4}{3}t + 2t + 5t = 1$, откуда $t = \frac{3}{25}$. Это означает:

$$AF : AC_1 = 3 : 25 \Rightarrow AF : FC_1 = 3 : 22.$$

Ответ: $AF : FC_1 = 3 : 22$.

6.097. Все плоские углы трехгранного угла $MABC$ равны α. Прямая MP образует со всеми его ребрами углы, равные φ, а со всеми гранями — углы, равные ψ. Найдите величины углов φ и ψ.

Решение. Пусть $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$ — единичные векторы базиса в пространстве; точка O — центроид треугольника ABC (рис. 61); $\overrightarrow{MK} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

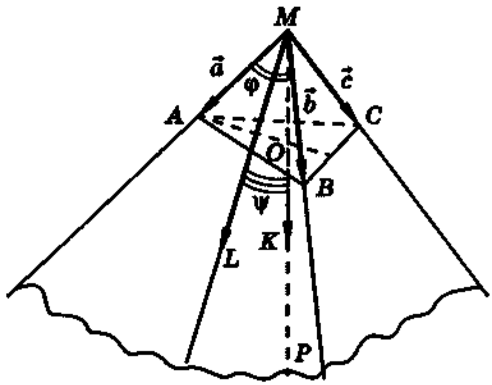


Рис. 61

Так как вектор $\overrightarrow{MK}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, то $\angle(\overrightarrow{MK}, \vec{a}) = \angle(\overrightarrow{MK}, \vec{b}) = \angle(\overrightarrow{MK}, \vec{c}) = \varphi$ и $\angle(MP, (AMB)) = \angle(MP, (AMC)) = \angle(MP, (CMB)) = \angle(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{ML}) = \psi$, где $\overrightarrow{ML} = \vec{a} + \vec{b}$ — направляющий вектор прямой ML, являющейся проекцией прямой MK на плоскость AMB. Прямая ML содержит биссектрису угла AMB, так как каждая точка прямой MP, образующей равные углы с ребрами трехгранного угла, равноудалена от каждого из этих ребер. Имеем: $\overrightarrow{MK}^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 3 + 6\cos\alpha \Rightarrow |\overrightarrow{MK}| = \sqrt{3(1 + 2\cos\alpha)}$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{MK} \cdot \vec{a}}{|\overrightarrow{MK}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a}}{|\overrightarrow{MK}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{1 + 2\cos\alpha}{\sqrt{3(1 + 2\cos\alpha)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + 2\cos\alpha}{3}} \Rightarrow \varphi = \arccos\sqrt{\frac{1 + 2\cos\alpha}{3}};$$

$$\cos\psi = \frac{\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{ML}}{\left|\overrightarrow{MK}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ML}\right|} = \frac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|} =$$

$$= \frac{2(1+2\cos\alpha)}{\sqrt{3(1+2\cos\alpha)}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{2(1+2\cos\alpha)}{3(1+\cos\alpha)}} =$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{3}} \Rightarrow \psi = \arccos\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{3}}.$$

Ответ: $\varphi = \arccos\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{3}}$; $\psi = \arccos\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{3}}$.

6.098. ☺ В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M величина угла между смежными боковыми гранями равна $\arccos\frac{1}{18}$ и длина бокового ребра равна 1. Точка K — середина ребра BM. Найдите: а) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$; б) длину вектора $\overrightarrow{AK}$.

6.099. ♉ В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ длины стороны основания и высоты равны соответственно 1 и 2. Найдите расстояние между прямыми BD и MA.

6.100. ☺ Точка K лежит на ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что $BK : KB_1 = 2 : 1$. Найдите: а) величину угла между прямыми CD_1 и KD; б) расстояние между прямыми CD_1 и KD, если длина ребра куба $\sqrt{43}$.

6.101. Точка K лежит на ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что $BK : KB_1 = 3$, точка P делит ребро AA_1 в отношении $AP : PA_1 = 1 : 4$. Найдите: а) величину угла между прямыми CP и KD_1; б) расстояние между прямыми CP и KD_1, если длина ребра куба 2.

6.102. ☺ Длины ребер AA_1, AB и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 12, 3 и 4. Найдите величину угла между векторами $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$.

6.103. Длины ребер AA_1, AB и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 6, 4 и 1. Найдите расстояние между прямыми AC_1 и B_1D_1.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 6

6.104. Точки M и H — середины ребер соответственно AB и CP тетраэдра $PABC$. Докажите, что $2\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BC}$.

6.105. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{AM}$, если: а) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{A_1A}$; б) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB_1}$; в) $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{B_1B}$; г) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{C_1C}$.

6.106. ♉ Можно ли составить: а) треугольник из медиан данного треугольника; б) замкнутую ломаную из отрезков, идущих из каждой вершины тетраэдра в точку пересечения медиан противоположной грани?

6.107. ♉ Точки A_1, B_1 и C_1 взяты на сторонах соответственно BC, AC и AB треугольника ABC так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A$. Докажите, что отрезки, равные AA_1, BB_1 и CC_1, являются сторонами некоторого треугольника.

6.108. ♉ *Отрезок, соединяющий середины противоположных ребер тетраэдра, называется его бимедианой.* Докажите, что все бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

6.109. Центроиды треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны некоторой плоскости.

6.110. ♉ *Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противолежащей грани, называется медианой тетраэдра.* Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и эта точка делит каждую из медиан в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

6.111. *Центроидом тетраэдра называется точка пересечения его медиан.* Точки M и M_1 — центроиды тетраэдров $PABC$ и $P_1A_1B_1C_1$. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{PP_1} = 4\overrightarrow{MM_1}$.

6.112. Докажите, что не существует плоскости, которой были бы параллельны диагонали всех боковых граней треугольной призмы.

6.113. Даны два параллелограмма $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$. Точки A, B, C, D — середины отрезков соответственно MM_1, NN_1, PP_1, QQ_1. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

6.114. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и K — середины отрезков соответственно A_1C_1 и BB_1. Докажите, что прямые KM, A_1B_1 и BC_1 параллельны некоторой плоскости.

6.115. Докажите, что точка пересечения медиан тетраэдра совпадает с точкой пересечения его бимедиан.

6.116. ♉ $KABC$ — тетраэдр. Какую фигуру образуют точки M такие, что: а) $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + x\overrightarrow{KC}$; б) $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{KB} + x\overrightarrow{KC}$; в) $\overrightarrow{KM} = z\overrightarrow{KA} + y\overrightarrow{KB} + x\overrightarrow{KC}$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

6.117. На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены точки E и F соответственно так, что $EF \parallel BC_1$. Найдите отношение длин отрезков EF и BC_1.

6.118. Дан тетраэдр $PABC$. Найдите все такие точки M пространства, что $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

6.119. ♉ В основании пирамиды $MABCD$ лежит трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD = 3BC$). На ребре MD отметили такую точку K, что $KM : KD = 2 : 3$; P — середина MB. В каком отношении, считая от точки M, плоскость AKP делит ребро MC?

6.120. ♉ $PABC$ — тетраэдр; b_1, b_2, b_3 — биссектрисы соответственно углов BPC, CPA, APB. Докажите, что если биссектрисы b_1, b_2 взаимно перпендикулярны, то каждая из них перпендикулярна биссектрисе b_3.

6.121. ♉ Три ребра прямоугольного параллелепипеда, имеющие общую вершину, «видны» из точки пересечения его диагоналей под углами α, β и γ. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

6.122. ♉ Из точки O пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали BA_1, BD и BC_1 трех его граней, имеющих общую вершину, «видны» под углами соответственно α, β и γ. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -1$.

6.123. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина диагонали A_1C_1 грани $A_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра BB_1. Докажите, что прямые A_1B_1, KM и BC_1 параллельны одной некоторой плоскости.

6.124. Из вершины параллелепипеда проведены три диагонали его граней. На этих диагоналях (как на ребрах) построен новый параллелепипед. Докажите, что противолежащая вершина данного параллелепипеда является серединой диагонали построенного параллелепипеда.

6.125. Точки K и E — середины ребер соответственно AB и CP тетраэдра $PABC$. Докажите, что прямые AP, BC и KE параллельны некоторой плоскости.

Глава

7 КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ

Задачи к § 24

7.001. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 1. Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{k}$. Найдите в базисе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ координаты векторов: а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{CA_1}$; в) $\overrightarrow{AK}$, где $K = BC_1 \cap B_1C$ (рис. 62).

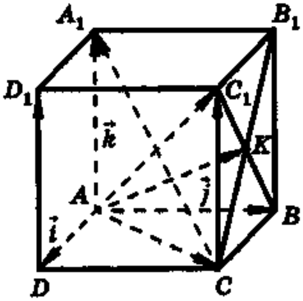


Рис. 62

Решение. а) Так как $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} = \vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$, то $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, значит, вектор $\overrightarrow{AC_1}$ имеет координаты (1; 1; 1), т. е. $\overrightarrow{AC_1}(1; 1; 1)$; б) $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC} = \vec{k} - (\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, т. е. $\overrightarrow{CA_1}(-1; -1; 1)$; в) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB}) = \vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} + \frac{1}{2}(-\vec{i}) = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$, т. е. $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: а) (1; 1; 1); б) (−1; −1; 1); в) $\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

7.002. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}(3; 4; 5)$ и $\vec{b}(6; 8; 10)$; б) $\vec{p}(2; -3; 3)$ и $\vec{q}(4; -6; 2)$?

Решение. а) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, так как $3 : 6 = 4 : 8 = 5 : 10$; б) координаты вектора $\vec{q}$ не пропорциональны одноименным координатам вектора $\vec{p}$, например, $2 : 4 \neq 3 : 2$. Поэтому векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны.

Попытайтесь установить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{p}$, если: а) $\vec{a}(-1; 4; 6)$, $\vec{b}(1; 7; 3)$, $\vec{p}(0; 11; 9)$; б) $\vec{a}(-3; 14; 6)$, $\vec{b}(6; -8; 7)$, $\vec{p}(-9; 62; 37)$; в) $\vec{a}(-1; 0; 0)$, $\vec{b}(0; 7; 0)$, $\vec{p}(0; 0; 9)$?

7.003. Найдите длины векторов $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, их скалярное произведение и угол между ними, если $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в базисе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Имеем: $\vec{a}(1; -1; 2) \Rightarrow 2\vec{a} = \overrightarrow{(2; -2; 4)}$,

$\vec{b}(2; 2; 0) \Rightarrow 3\vec{b} = \overrightarrow{(6; 6; 0)}$.

Тогда $2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{p}(8; 4; 4)$, $2\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{q}(-4; -8; 4)$. Значит, $|\vec{p}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{6}$; $|\vec{q}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 4^2} = 4\sqrt{6}$; $\vec{p} \cdot \vec{q} = 8 \cdot (-4) + 4 \cdot (-8) + 4 \cdot 4 = -48$;

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{-48}{4\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}, \text{ откуда } \varphi = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 120°.$$

Ответ: $4\sqrt{6}$; $4\sqrt{6}$; -48; $120°$.

П. 24.1–24.3

7.004. ☺ Запишите координаты векторов: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$; $\vec{c} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{p} = \vec{i} + \vec{k}$; $\vec{m} = \vec{j} - 2\vec{i}$; $\vec{n} = -\vec{k}$.

7.005. ☺ Даны векторы: $\vec{a}(3; 7; -2)$, $\vec{b}(0; -5; -2)$, $\vec{c}(-1; 2; 0)$, $\vec{p}(2; 0; -3)$, $\vec{q}(0; 0; 5)$. Запишите их разложения в базисе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

7.006. Даны векторы $\vec{a}(-1; 2; 0)$, $\vec{b}(0; -5; -2)$, $\vec{c}(2; 1; -3)$. Найдите координаты векторов $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ и $\vec{q} = \vec{c} - 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

7.007. ☺ При каких m и n вектор $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + m\vec{k}$ коллинеарен вектору $\vec{b} = n\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$?

7.008. Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}(1; -2; -1)$, $\vec{b}(3; 1; 2)$, $\vec{c}(5; -3; 0)$; б) $\vec{p}(2; 0; -3)$, $\vec{i}$, $\vec{j}$; в) $\vec{m}(2; 0; -3)$, $\vec{i}$, $\vec{k}$; г) $\vec{a}(1; -1; 2)$, $\vec{b}(5; -1; 0)$, $\vec{c}(-2; 0; 1)$; д) $\vec{a}(0; 5; 3)$, $\vec{b}(3; 3; 3)$, $\vec{c}(1; 1; 4)$?

Решение. а) Векторы $\vec{a}(1; -2; -1)$ и $\vec{b}(3; 1; 2)$ не коллинеарны, так как их одноименные координаты не пропорциональны

$(1 : 3 \neq -2 : 1)$. Если вектор $\vec{c}(5;\ -3;\ 0)$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны (т. 35); в противном случае векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны. Таким образом, для решения задачи достаточно установить, существуют ли числа x и y такие, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. В координатах это означает, имеет ли решение система уравнений относительно x и y

$$\begin{cases} x + 3y = 5, \\ -2x + y = -3, \\ -x + 2y = 0. \end{cases}$$

Складывая первое и третье уравнения этой системы, получаем $y = 1$. Тогда $x = 2$. Поэтому $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$. Это означает, что вектор $\vec{c}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

7.009. ☺ Найдите длины векторов: $\vec{a}(5;\ -1;\ 7)$, $\vec{b}(6;\ 2\sqrt{3};\ -1)$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{m} = -3\vec{k}$, $\vec{p} = \vec{i} - 3\vec{j}$.

7.010. Даны векторы: $\vec{a}(5;\ -1;\ 7)$, $\vec{b}(-2;\ 3;\ 1)$, $\vec{c}(-3;\ 2;\ 1)$. Найдите: а) $|\vec{a} + \vec{b}|$; б) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$; в) $|\vec{a} - \vec{b}|$; г) $|\vec{a}| - |\vec{b}|$; д) $|3\vec{c}|$; е) $|2\vec{a} - 3\vec{c}|$; ж) $2|\vec{a}| - 3|\vec{c}|$.

7.011. (*Устно.*) Даны векторы: $\vec{a}(1;\ -1;\ 2)$, $\vec{b}(-1;\ 1;\ 1)$, $\vec{c}(5;\ 6;\ 2)$. Найдите: $\vec{a} \cdot \vec{c}$; $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a}^2$; $\sqrt{\vec{b}^2}$.

7.012. Проекции вектора $\vec{p}$ на оси координат равны соответственно: 3; −8; 5. Найдите координаты вектора $\vec{p}$.

7.013. (*Устно.*) Даны векторы $\vec{a}(5;\ -1;\ 3)$ и $\vec{b}(4;\ 2;\ 3)$. При каком значении числа x $Пр._{\vec{k}}(2\vec{a} + x\vec{b}) = 0$?

7.014. (*Устно.*) Даны векторы $\vec{a}(3;\ -1;\ 1)$, $\vec{b}(-5;\ 1;\ 0)$, $\vec{c}(-1;\ -2;\ 1)$. Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

7.015. (*Устно.*) Острый, прямой или тупой угол образует вектор $\vec{b}(4;\ -6;\ 0)$ с базисными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$?

7.016. Найдите угол между векторами: а) $\vec{a}(2; -2; 0)$ и $\vec{b}(3; 0; -3)$; б) $\vec{a}(0; 5; 0)$ и $\vec{b}(0; -\sqrt{3}; 1)$; в) $\vec{a}(-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -2)$ и $\vec{b}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -1\right)$.

7.017. Известно, что $\widehat{(\vec{a}, \vec{c})} = \widehat{(\vec{b}, \vec{c})} = 60°$; $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$. Найдите: а) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$; б) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot \vec{c}$.

7.018. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$; б) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$; г) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{AD_1}$; ж) $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; з) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$.

7.019. ☺ Найдите все такие значения x, при которых векторы $\vec{a}(3; 5 - x; x)$ и $\vec{b}(5 + x; 7x + 1; 2)$ коллинеарны.

7.020. Даны векторы $\vec{a}(1; 0; 0)$, $\vec{b}(1; 1; 0)$ и $\vec{c}(1; 1; 1)$. Разложите по данным векторам вектор $\vec{m}(3; -7; 11)$.

7.021. Известно, что $\vec{m} = 7\vec{a} + 2\vec{b}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $\vec{b}(-1; 5; 3)$ и $\vec{m}(0; 1; 8)$.

7.022. При каких значениях n векторы $\vec{a}(3; n; 5)$ и $\vec{b}(-4; 3; n)$ перпендикулярны?

7.023. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны вектору $\vec{c}$, $\widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 120°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Найдите: а) скалярные произведения $2\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ и $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$; в) $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|$.

7.024. ☺ Дан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 2. Точка M — центр основания $A_1B_1C_1D_1$. Точки E и H взяты соответственно на отрезках BB_1 и AC так, что $BE : BB_1 = 1 : 2$, $AH : AC = 1 : 4$. Выберите ортонормированный базис в пространстве и, пользуясь разложением вектора в этом базисе, найдите: 1) длину отрезка: а) AM; б) EH; в) MH; 2) угол между векторами: а) $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{BD_1}$; в) $\overrightarrow{HM}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.

7.025. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равны 1. Точка O — центр грани $ABCD$. Точки E, F,

H — середины ребер соответственно BP, CP, AP. Выберите ортонормированный базис в пространстве и, пользуясь разложением вектора в этом базисе, найдите: а) длину отрезка OP; б) длину отрезка CH; в) угол между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BF}$; г) угол между медианой PM грани BPC и высотой AE грани APB.

7.026. Найдите расстояние от вершины A треугольника ABC до его центроида M, если $A(-2; 1; -3)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(1; 2; 6)$.

Решение. Пусть AA_1 — медиана $\triangle ABC$ (рис. 63). Точка A_1 — середина стороны BC — имеет координаты:

$$x = \frac{-1+1}{2} = 0,\ y = \frac{0+2}{2} = 1,\ z = \frac{4+6}{2} = 5, \text{ т. е. } A_1(0; 1; 5).$$

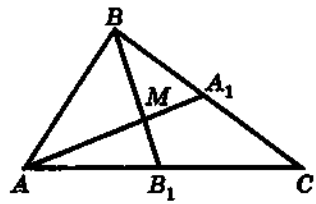


Рис. 63

Далее, точка M делит медиану AA_1 в отношении $\lambda = AM : MA_1 = 2 : 1 = 2$. Поэтому координаты точки M равны:

$$x = \frac{-2+2\cdot 0}{1+2} = -\frac{2}{3},\ y = \frac{1+2\cdot 1}{1+2} = 1,\ z = \frac{-3+2\cdot 5}{1+2} = \frac{7}{3}.$$

Таким образом, $M\left(-\frac{2}{3}; 1; \frac{7}{3}\right)$. Тогда

$$|AM| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}+2\right)^2 + (1-1)^2 + \left(\frac{7}{3}+3\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{17}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}\sqrt{17}$.

Замечание. Координаты точки M можно найти проще, если учесть, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Кроме того, $AM = \frac{2}{3}AA_1$.

7.027. Дан треугольник ABC, координаты вершин которого: $A(1; 5; 3)$, $B(3; 6; 5)$, $C(1; 1; 0)$. Найдите координаты точки пересечения стороны BC и биссектрисы угла A.

Решение. $AB = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3$; $AC = \sqrt{0^2+(-4)^2+(-3)^2} = 5$. Если биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке $A_1(x;\ y;\ z)$, то по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC} = 0{,}6$, т. е. точка A_1 делит отрезок BC в отношении $\lambda = 0{,}6$. Тогда:

$$x = \frac{3+0{,}6\cdot 1}{1+0{,}6} = \frac{9}{4},\ y = \frac{6+0{,}6\cdot 1}{1+0{,}6} = \frac{33}{8},\ z = \frac{5+0{,}6\cdot 0}{1+0{,}6} = \frac{25}{8}.$$

Ответ: $\left(\frac{9}{4};\ \frac{33}{8};\ \frac{25}{8}\right)$.

п. 24.4–24.5

7.028. ☺ В прямоугольной системе координат $Oxyz$ постройте точки $A(1;\ 1;\ 2)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(2;\ -1;\ 1)$, $D(2;\ 2;\ -1)$, $E(-5;\ -3;\ 1)$, $F(0;\ 3;\ 1)$, $G(3;\ 0;\ 1)$, $P(3;\ 1;\ 0)$, $K(0;\ 3;\ 0)$, $M(0;\ 0;\ 3)$, $H(3;\ 0;\ 0)$.

7.029. Даны векторы $\overrightarrow{OA}(2;\ 3;\ 4)$, $\overrightarrow{OB}(-3;\ 2;\ -5)$, $\overrightarrow{OC}(0;\ -1;\ 1)$. Какие координаты имеют точки A, B и C, если O — начало системы координат?

7.030. (*Устно.*) Даны точки $A(-2;\ 2;\ 0)$, $B(4;\ -4;\ 3)$, $C(7;\ 0;\ -9)$. Какие координаты имеют векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, где O — начало системы координат?

7.031. ☺ Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(3;\ 8;\ 7)$, $B(-1;\ 8;\ -3)$.

7.032. Найдите координаты точки M, если даны координаты точки $N(-3;\ 3;\ 8)$ и вектора $\overrightarrow{MN}(1;\ 0;\ 5)$.

7.033. Найдите координаты точки P, если даны координаты точки $K(-3;\ 3;\ 8)$ и вектора $\overrightarrow{KP}(11;\ -2;\ -2)$.

7.034. Вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(1;\ 6;\ 2)$, $B(2;\ 3;\ -1)$, $C(-3;\ 4;\ 5)$. Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$

и $\overrightarrow{AC}$ по базисным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Найдите координаты центроида треугольника ABC.

7.035. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 1. Выберите прямоугольную систему координат с началом в вершине A и найдите координаты вектора: а) $\overrightarrow{AK}$, где $K = A_1C \cap (AB_1D_1)$; б) $\overrightarrow{DO_1}$, где O_1 — центр грани BCC_1B_1; в) $\overrightarrow{CM}$, где M — центр куба.

7.036. ☺ Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если: а) $A(3;\ -7;\ 8)$, $B(-5;\ 4;\ 1)$, $C(27;\ -40;\ 29)$; б) $A(-5;\ 7;\ 12)$, $B(4;\ -8;\ 3)$, $C(13;\ -23;\ -6)$; в) $A(-4;\ 8;\ -2)$, $B(-3;\ -1;\ 7)$, $C(-2;\ -10;\ -16)$?

7.037. ♉ Найдите координаты такой точки C плоскости Oxy, которая лежит на одной прямой с точками $A(3;\ -8;\ 7)$ и $B(-1;\ 2;\ -7)$. Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?

7.038. ♉ Существует ли на оси Oz точка, лежащая на одной прямой с точками $A(-1;\ 3;\ 5)$ и $B(2;\ 2;\ 8)$?

7.039. (*Устно.*) Найдите координаты середины отрезка AB, если $A(-1;\ 8;\ 3)$ и $B(1;\ 5;\ 7)$.

7.040. ☺ Найдите координаты точек M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5, делящих отрезок AB соответственно в отношениях $\lambda = 1$, $\lambda = -3$, $\lambda = 5$, $\lambda = -\frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, если $A(0;\ -1;\ 3)$ и $B(5;\ 2;\ 8)$. Запишите эти точки по порядку на прямой в направлении AB.

7.041. К точке $A(2;\ -1;\ 3)$ приложены две силы $\vec{F}_1(1;\ 2;\ -2)$ и $\vec{F}_2(-1;\ 3;\ 2)$. Найдите точку, в которую перейдет точка A под действием их равнодействующей.

7.042. ♉ Лежат ли точки A, B, C и E в одной плоскости, если: а) $A(-2;\ -13;\ 3)$, $B(1;\ 4;\ 1)$, $C(-1;\ -1;\ -4)$, $E(0;\ 0;\ 0)$; б) $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(3;\ 4;\ -1)$, $C(-2;\ -3;\ 0)$, $E(2;\ 0;\ 3)$; в) $A(5;\ -1;\ 0)$, $B(-2;\ 7;\ 1)$, $C(12,\ -15;\ -17)$, $E(1;\ 1;\ -2)$?

7.043. Даны точки $A(1;\ 3;\ 5)$ и $B(2;\ 1;\ -7)$. Найдите на оси абсцисс все такие точки C, что треугольник ABC — прямоугольный.

Решение. Пусть $C(x;\ 0;\ 0)$ — искомая точка. Тогда имеем: $\overrightarrow{AB}(1;\ -2;\ -12)$, $\overrightarrow{AC}(x-1;\ -3;\ -5)$, $\overrightarrow{BC}(x-2;\ -1;\ 7)$. Может представиться один и только один из трех случаев: в треугольнике ABC прямым окажется или угол при вершине A, или угол при вершине B, или, наконец, угол при вершине C. Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) $\angle BAC$ — прямой, если $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. В координатной форме это означает:

$x-1+6+60=0$, откуда $x=-65$, т. е. вершина прямого угла имеет координаты: $C_1(-65;\ 0;\ 0)$.

б) $\angle ABC$ — прямой, если $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. В координатах это равносильно уравнению

$x-2+2-84=0$, откуда $x=84$, т. е. вершина прямого угла имеет координаты $C_2(84;\ 0;\ 0)$.

в) $\angle ACB$ — прямой, если $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. В координатах это равносильно уравнению

$(x-1)(x-2)+3-35=0$ или $x^2-3x-30=0$, откуда $x_1=\dfrac{3-\sqrt{129}}{2}$, $x_2=\dfrac{3+\sqrt{129}}{2}$, т. е. существуют два прямоугольных треугольника, вершинами прямых углов которых являются точки $C_3\left(\dfrac{3-\sqrt{129}}{2};\ 0;\ 0\right)$ и $C_4\left(\dfrac{3+\sqrt{129}}{2};\ 0;\ 0\right)$.

Ответ: $C_1(-65;\ 0;\ 0)$; $C_2(84;\ 0;\ 0;)$; $C_3\left(\dfrac{3-\sqrt{129}}{2};\ 0;\ 0;\right)$; $C_4\left(\dfrac{3+\sqrt{129}}{2};\ 0;\ 0\right)$.

7.044. ☺ Найдите координаты точек, удаленных от каждой из координатных плоскостей на 8.

7.045. Где может быть расположена точка, если: а) ровно одна ее координата равна нулю; б) ровно две ее координаты равны нулю?

7.046. Дана точка $M(2;\ -3;\ 4)$. Каковы координаты точек, ближайших к ней и лежащих: а) на каждой из координатных плоскостей; б) на каждой из осей координат?

7.047. Даны точки $A(5; 0; 1)$ и $C(0; -3; 4)$. Найдите координаты точки B, если $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CA}$; O — начало координат.

7.048. Даны точки $A(3; 5; 6)$, $B(4; 7; 8)$ и $C(3; 8; 10)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

7.049. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, если $A(2; 3; 4;)$, $B(4; -2; 2)$, $C(0; -1; -2)$, $D(-2; 4; 0)$.

7.050. Точка M — середина отрезка AB. Найдите координаты: а) точки M, если $A(0; 3; -4)$, $B(-2; 2; 0)$; б) точки B, если $A(14; -8; 5)$, $M(3; -2; -7)$.

7.051. Известны координаты вершин треугольника ABC: $A(0; 3; 4)$, $B(4; -1; 2)$, $C(1; 1; 2)$. Найдите длину его медианы, проведенной из вершины C, и расстояние от начала координат до центроида треугольника.

7.052. ☺ На оси Ox найдите точку, равноудаленную от точек $B(3; -2; 4)$ и $C(0; 5; -1)$.

7.053. Даны вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-3; -6; -1)$, $B(-1; 2; -3)$, $C(3; 1; 1)$. Найдите координаты четвертой вершины.

7.054. Определите вид треугольника ABC, если: а) $A(9; 3; -5)$, $B(2; 10; -5)$, $C(2; 3; 2)$; б) $A(3; 7; -4)$, $B(5; -3; 2)$, $C(1; 3; -10)$; в) $A(-5; 2; 0)$, $B(-4; 3; 0)$, $C(-5; 2; -2)$.

7.055. Найдите углы, периметр и площадь треугольника ABC, если $A(1; -1; 3)$, $B(3; -1; 1)$, $C(-1; 1; 3)$.

7.056. ☺ Точки $(1; 1; 1)$, $(2; 1; 1)$, $(2; 2; 1)$, $(1; 2; 1)$ являются вершинами куба. Каковы координаты остальных его вершин?

7.057. ☺ В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром 2 основание ABC лежит в плоскости Oxy. Найдите координаты вершин B и P, если: а) $A(-1; 0; 0)$, $C(1; 0; 0)$; б) $A(0; 0; 0)$, $C(2; 0; 0)$.

7.058. Дана точка $P(-1; 3; 8)$. Найдите координаты проекций точки P на координатные плоскости и на координатные оси. Вершинами какого многогранника являются эти проекции вместе с точкой P и началом координат O? Найдите объем и полную поверхность этого многогранника.

7.059. ♉ Даны точки $A(-1; 3; 8)$ и $B(-1; 2; 9)$. Найдите все такие точки C плоскости Oyz, что треугольник ABC — равносторонний.

7.060. ☺ Середина отрезка AB лежит на оси Ox. Найдите m и n, если: а) $A(-3; m; 5)$, $B(2; -2; n)$; б) $A\left(1; \frac{1}{2}; -4\right)$, $B(1; m; 2n)$; в) $A(0; m; n+1)$, $B(1; n; 1-m)$.

7.061. ☺ На каждой из осей координат найдите такую точку, расстояние от которой до точки $A(-2; 4; \sqrt{3})$ является наименьшим среди всех расстояний от точек этой прямой до точки A.

7.062. Найдите на оси Oz точку, равноудаленную от точек $C(-1; 3; 5)$ и $D(3; -7; 1)$.

7.063. Даны точки $A(0; 1; 2)$, $B(\sqrt{2}; 1; 2)$, $C(\sqrt{2}; 2; 1)$, $D(0; 2; 1)$. Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

7.064. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если $A(-1; 2; -3)$, $B(-5; 2; 1)$, $C(-9; 6; 1)$, $D(-9; 10; -3)$.

7.065. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Выберите прямоугольную систему координат и найдите расстояния между прямыми: а) AB_1 и BC_1; б) AA_1 и BD_1; в) A_1C и BC_1.

7.066. ♉ Основание ABC правильного тетраэдра $PABC$ лежит на плоскости Oxy так, что вершины A и C имеют координаты: $A(0; 0; 0)$, $C(4; 0; 0)$. Найдите координаты: а) остальных вершин тетраэдра; б) центроидов всех его граней.

7.067. Основание $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит на плоскости Oxy. Найдите координаты вершин: а) A_1, B_1, C_1 и D_1, если $A(2; 1; 0)$, $B(3; 2; 0)$, $C(2; 3; 0)$, $D(1; 2; 0)$; б) A, B_1, C, D, D_1 и центров всех граней куба, если $A(2; 2; 3)$, $B(5; 2; 0)$, $C_1(5; 5; 3)$.

7.068. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 — центры граней соответственно BCP, ABP, ACP, ABC правильного тетраэдра $PABC$ с ребром 2. Выберите прямоугольную систему координат и найдите: 1) расстояния от вершин тетраэдра до противолежащих граней; 2) величину угла между векторами: а) $\overrightarrow{AM_1}$ и $\overrightarrow{BM_2}$;

б) $\overrightarrow{CM_2}$ и $\overrightarrow{PM_4}$; в) $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$, где E и F — середины ребер соответственно PC и PA.

7.069. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 точки M_1 и M_2 — центроиды сечений AB_1D_1 и BC_1D соответственно. Выберите прямоугольную систему координат и найдите расстояние: а) от вершины A_1 до плоскости AB_1D_1; б) от вершины C до плоскости BC_1D; в) от вершины A_1 до плоскости BC_1D; г) между точками M_1 и M_2. В каком отношении плоскости AB_1D_1 и BC_1D делят диагональ A_1C куба?

7.070. ☺ Даны точки $A(3; 1; 5)$ и $B(-2; 2; 4)$. Найдите на оси аппликат все такие точки C, что треугольник ABC — равнобедренный.

7.071. ☺ Найдите четвертую вершину правильного тетраэдра $PABC$, если $A(0; 0; 4)$, $B(0; 4; 0)$, $C(4; 0; 0)$.

7.072. ♉ Даны точки $A(2; 3; 1)$ и $B(-1; -2; 3)$. Найдите все такие точки C на оси Oz, что треугольник ABC — прямоугольный.

Задачи к § 25

п. 25.1—25.2

7.073. Напишите уравнения всех плоскостей, проходящих через точки $A(8; 0; 0)$, $B(0; 0; 5)$ и пересекающих ось ординат в точке, удаленной от начала координат на 7.

7.074. ☺ Напишите уравнение сферы с центром в точке $M(-1; 3; 5)$ и радиусом 4.

7.075. ☺ Напишите уравнение сферы с центром в точке $M(2; 0; -3)$, проходящей через начало координат.

7.076. ☺ Напишите уравнение сферы с диаметром AB, если $A(-3; 5; 0)$ и $B(1; -7; 2)$.

7.077. Даны точки $A(4; 1; 0)$, $B(-1; -2; -5)$, $C(2; 4; 3)$, $E\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 7\right)$. Укажите, какая из них принадлежит плоскости $2x - 5y + z - 3 = 0$.

7.078. Даны точки $A(3; 2; 5)$, $B(-1; -2; 8)$, $C(2; 1; 3)$, $O(0; 0; 0)$ и плоскость $x + 3y - z - 4 = 0$. Назовите: а) точки, принадлежащие данной плоскости; б) точки, не принадлежащие данной плоскости; в) пары точек, расположенные по одну сторону от данной плоскости.

7.079. Для каждой из данных плоскостей укажите ее расположение относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz и координатных осей Ox, Oy, Oz (совпадение, пересечение, параллельность): а) $x = 0$; б) $y = 2$; в) $2x + 3y = 0$; г) $3y - 5z = 0$; д) $y + 3z - 5 = 0$; е) $2x + y - z + 3 = 0$.

7.080. Найдите точки пересечения осей координат с плоскостью $2x + 3y - z - 5 = 0$.

7.081. ☺ Составьте уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OM}$, если: а) $M(2; 0; -2)$; б) $M(1; 1; 1)$; в) $M(-1; -2; 7)$.

7.082. ☺ Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $K(-2; 7; 1)$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(-1; 2; 8)$ и $B(1; -1; 3)$.

7.083. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной вектору $\vec{p}$, если: а) $M(2; 0; -2)$, $\vec{p}(3; -4; 5)$; б) $M(0; 0; 0)$, $\vec{p}(-2; -3; 4)$; в) $M(-2; 3; 0)$, $\vec{p}(5; 1; -4)$.

7.084. ☺ Составьте уравнение плоскости, если она проходит: а) через точку $M(3; 0; 0)$ и перпендикулярна оси абсцисс; б) через точку $K(0; 3; 0)$ и перпендикулярна оси ординат; в) через точку $P(0; 0; 3)$ и перпендикулярна оси аппликат; г) через точку $E(0; 0; -4)$ и параллельна осям Ox и Oy; д) через точки $(3; 0; 0)$, $(0; 0; 3)$ и параллельна оси ординат.

7.085. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки: а) $P(2; 0; 0)$, $K(0; 2; 0)$, $H(0; 0; 2)$; б) $P(2; -1; 2)$, $K(1; -2; 3)$, $H(-1; 2; 0)$.

Решение. а) Воспользуемся уравнением плоскости в отрезках. В нашем случае $a = b = c = 2$, поэтому уравнение плоскости PKH запишется в виде $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ или $x + y + z - 2 = 0$.

б) Пусть плоскость $\alpha = (PKH)$ имеет уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

Чтобы составить уравнение плоскости α, нужно найти коэффициенты A, B, C и свободный член D. Для этого используем условие перпендикулярности точек P, K и H плоскости α. Так как точки P, K и H принадлежат плоскости α, то их координаты удовлетворяют уравнению (1), т. е.

$$\left.\begin{array}{l} P(2;-1;2)\in\alpha \Rightarrow A\cdot 2+B\cdot(-1)+C\cdot 2+D=0,\\ K(1;-2;3)\in\alpha \Rightarrow A\cdot 1+B\cdot(-2)+C\cdot 3+D=0,\\ H(-1;2;0)\in\alpha \Rightarrow A\cdot(-1)+B\cdot 2+C\cdot 0+D=0\end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} 2A-B+2C+D=0,\\ A-2B+3C+D=0,\\ -A+2B+D=0.\end{array}\right\}$$

Решая эту систему уравнений, выразим коэффициенты A, B и C через D: $A=-\frac{D}{9}$, $B=-\frac{5D}{9}$, $C=-\frac{2D}{3}$. Полагая $D=-9$, имеем $A=1$, $B=5$, $C=6$. Подставив найденные значения A, B и C в уравнение (1), получаем искомое уравнение плоскости PKH: $x+5y+6z-9=0$.

7.086. Напишите уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка MN и перпендикулярной этому отрезку, если $M(-3; 1; 5)$ и $N(3; 9; -1)$.

7.087. ☺ Одно из оснований призмы лежит в плоскости $2x-3y+z-5=0$. Напишите уравнение плоскости, в которой лежит другое основание, если одна из вершин призмы имеет координаты $(8; 1; 0)$.

7.088. ☺ Уравнение плоскости $3x+2y-6z-12=0$ приведите к виду в отрезках.

7.089. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -1; 3)$ и перпендикулярной прямой BC, если $B(-2; 0; 1)$, $C(4; 2; -1)$.

7.090. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1; 2; 1)$ и параллельной плоскости: а) Oxy; б) Oyz; в) Oxz; г) $2x-y+3z+5=0$.

7.091. (*Устно.*) Найдите точки пересечения плоскости $2x-y+2z-5=0$ с координатными осями. Напишите уравнение этой плоскости в отрезках.

7.092. Нарисуйте плоскость, заданную уравнением: а) $x = 3$; б) $y = -3$; в) $z = 4$; г) $x - 2y = 0$; д) $y - 2z = 0$; е) $x + y = 1$; ж) $x + 3z = 2$; з) $x + 2y - 3z = 6$; и) $x + 2y + 3z = 6$; к) $x + y - z = 0$.

7.093. ☺ Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки: а) (0; 0; 3), (0; 3; 0), (3; 0; 0); б) (0; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 0); в) (2; 3; 0), (2; 0; −5), (0; 3; −5).

7.094. Напишите уравнения всех сфер, радиусом которых служит отрезок PQ, если $P(-1; 2; 1)$ и $Q(0; 3; 2)$.

7.095. ☺ Какие из приведенных ниже уравнений являются уравнениями сферы: а) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; б) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 7$; в) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 10z + 35 = 0$; г) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 5z + 7 = 0$; д) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 5z + 9 = 0$? Найдите центр и радиус каждой сферы.

7.096. Напишите уравнение сферы: 1) с центром в точке (3; −3; 3) и касающейся координатных плоскостей; 2) с центром в точке (2; −3; 4) и касающейся координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

7.097. ☺ Напишите уравнение плоскости, состоящей из точек, равноудаленных от точек: а) (2; 0; 0) и (−2; 0; 0); б) (0; 2; 0) и (0; 4; 0); в) (3; 1; 3) и (−3; 1; 3); г) (2; 1; 5) и (2; −1; −5); д) (−1; −2; 3) и (2; 1; 5).

7.098. Изобразите множество точек пространства, для которых $xyz = 0$.

7.099. ☺ Изобразите множество точек пространства, для которых $|x| + |y| = 1$.

7.100. ☺ Изобразите множество точек пространства, для которых $x^2 + 4zy = y^2 + 4z^2$.

7.101. Найдите геометрическое место таких точек $M(x; y; z)$, которые равноудалены от начала координат и от точки $P(2; -3; 8)$.

7.102. ♉ На плоскости $2x + 3y - 5z - 1 = 0$ найдите такую точку $M_0(x; y; z)$, что отрезок MM_0 перпендикулярен этой плоскости, если $M(1; 2; -1)$.

7.103. Найдите величину угла между плоскостями $2x + 2y - z - 2 = 0$ и $5x + 12y - 2 = 0$.

7.104. ☺ Найдите величину двугранного угла, образованного плоскостями $x + 2y - 2z - 7 = 0$ и $3x + 4y + 12z + 1 = 0$ и содержащего начало координат.

7.105. ♉ Сфера задана уравнением $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 4$. Найдите координаты точки этой сферы: а) ближайшей к началу O системы координат; б) самой далекой от точки O; в) ближайшей к каждой из координатных плоскостей; г) самой далекой от каждой из координатных плоскостей; д) ближайшей к каждой из координатных осей; е) самой далекой от каждой из координатных осей; ж) ближайшей к точке (3; 3; 6); з) самой далекой от точки (3; 3; 6).

7.106. Для каждого a определите множество точек, заданных уравнением $x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 = a$.

7.107. ♉ Найдите длину линии, состоящей из всех общих точек двух сфер $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 196$ и $(x + 3)^2 + (y + 6)^2 + (z + 7)^2 = 225$.

7.108. ♉ Напишите уравнение плоскости, в которой лежат все общие точки сфер $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

7.109. ☺ Напишите уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + 2x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 0$ в начале координат.

7.110. ♉ Напишите уравнение сферы с центром (1; 1; 2), касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

7.111. Напишите уравнения сфер, расстояния от любой точки которых до сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ равно 1.

7.112. ♉ Найдите множество таких вершин $C(x; y; z)$ треугольника ABC, что угол C является прямым, если $A(1; 2; 7)$ и $B(3; -4; -1)$.

7.113. ☺ Найдите множество точек, расстояние от которых до сферы $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9$ равно 2.

7.114[1]. В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром 2 точки M_1 и M_2 — центроиды граней соответственно ABC и PBC. Выберите

---

[1] Творческая задача.

прямоугольную систему координат и найдите координаты точки пересечения: а) прямой PM_2 и грани ABC; б) прямой AM_1 и грани PBC.

7.115. ☺ Выберите прямоугольную систему координат $Oxyz$. 1) Нарисуйте куб, заданный системой неравенств: $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$. 2) Задайте системой неравенств: а) куб с ребром 4; б) прямоугольный параллелепипед с ребрами 2, 3 и 4.

7.116. ♉ Найдите все точки плоскости $2x + 3y - z - 5 = 0$, равноудаленные от координатных плоскостей.

7.117. ♉ Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M(-1; 2; 7)$ и $N(1; -9; 5)$ параллельно оси Oy.

7.118. ♉ Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; 3; 8)$ и $N(2; 5; -1)$ перпендикулярно плоскости $2x - y + z = 0$.

7.119. ♉ Изобразите множество точек пространства, для которых $|x| + |y| + |z| = 1$.

7.120. ☺ Изобразите множество точек пространства, для которых $|x| + |y| + |z| = 2x + 3y + 4z$.

7.121. Изобразите множество точек пространства, для которых $|x| + |y| - |z| = 4$.

7.122. Найдите геометрическое место таких точек $M(x; y; z)$, сумма квадратов расстояний которых до точек $A(3; 8; 1)$ и $B(1; -1; 3)$ равна сумме квадратов их расстояний до точек $C(0; -1; 3)$ и $D(1; 5; -2)$.

7.123. ♉ Найдите косинусы углов, образованных плоскостью $3x - 5y + z - 8 = 0$ и координатными плоскостями.

7.124. ♉ Докажите, что сумма квадратов косинусов углов, образованных произвольной плоскостью с тремя попарно перпендикулярными плоскостями, равна 1.

7.125. Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскостям $2x + 3y - z - 5 = 0$ и $x + 2y + z - 11 = 0$.

7.126. Для каждого a определите множество точек, заданных уравнением $x^2 + 2ax + y^2 + z^2 - 4z + 8 = 0$.

7.127. ♉ Найдите площадь фигуры, состоящей из всех общих точек двух шаров $(x-3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 64$ и $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-8)^2 = 36$.

7.128. ☺ Напишите уравнение плоскости, в которой лежат все общие точки сфер $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+5)^2 = 9$ и $(x-4)^2 + (y+6)^2 + (z+5)^2 = 16$.

7.129. Напишите уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 9$ в точке $M(3;\ 2;\ 2)$.

7.130. ☺ Напишите уравнение сферы с центром в точке $(5;\ 1;\ 1)$, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

7.131. Найдите множество таких точек $B(x;\ y;\ z)$, что угол ABC является тупым, если $A(3;\ -1;\ 0)$ и $C(1;\ 3;\ 2)$.

7.132. Найдите множество таких точек $K(x;\ y;\ z)$, что угол MKN является острым, если $M(1;\ 2;\ 0)$ и $N(-1;\ -2;\ 4)$.

7.133. Составьте уравнение фигуры, состоящей из точек, равноудаленных от точек $(-2;\ 1;\ -1)$ и $(4;\ -1;\ 3)$.

7.134. Напишите уравнение плоскости, равноудаленной от плоскостей: а) $x = 1$ и $x = 5$; б) $x = 0$ и $y = 0$; в) $x + y + z = 3$ и $x + y + z - 9 = 0$.

7.135. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Выберите прямоугольную систему координат и найдите координаты точек пересечений прямой B_1D с плоскостями A_1BC_1 и ACD_1. Определите отношение, в котором диагональ B_1D делится этими плоскостями.

7.136[1]. Дан правильный тетраэдр $PABC$ с ребром 2. Выберите прямоугольную систему координат и составьте уравнения: а) его граней; б) плоскости, которая проходит через сторону его основания и середину противолежащего ребра; в) прямой, проходящей через вершину тетраэдра и центроид противолежащей грани; г) прямой, проходящей через центроиды двух

[1] Творческая задача.

граней тетраэдра; д) прямой, проходящей через середины двух противоположных ребер тетраэдра; е) плоскости, проходящей через центроид основания тетраэдра параллельно его боковой грани.

7.137. ♉ Даны точки $A(2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Найдите: а) точки, равноудаленные от точек A, B, C и отстоящие от плоскости Oxz на расстоянии, равном 3; б) координаты центра сферы радиуса $\sqrt{19}$, проходящей через точки A, B и C.

7.138. Сфера S задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 6z + 15 = 0$. Найдите координаты точки этой сферы: а) ближайшей к началу O системы координат; б) самой далекой от точки O; в) ближайшей к каждой из координатных плоскостей; г) самой далекой от каждой из координатных плоскостей; д) ближайшей к каждой из координатных осей; е) самой далекой от каждой из координатных осей; ж) ближайшей к точке $(3; 3; 5)$; з) самой далекой от точки $(3; 3; 5)$.

7.139[1]. Выберите прямоугольную систему координат $Oxyz$ и задайте системой неравенств: а) правильную треугольную призму, сторона основания которой равна 2, а боковое ребро 4; б) правильный тетраэдр с ребром, равным 2.

п. 25.3—25.4

7.140. Составьте уравнения прямой, проходящей через точки $A(1; -2; 3)$ и $B(2; 1; 5)$.

Решение. Пусть $A(1; -2; 3)$ — «начальная» точка прямой $l = AB$, а $\overrightarrow{AB}(1; 3; 2)$ — ее направляющий вектор. Тогда параметрические уравнения прямой l имеют вид:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 3 + 2t. \end{cases} \qquad (*)$$

Уравнения прямой l по двум ее точкам имеют вид

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y+2}{1+2} = \frac{z-3}{5-3} \text{ или } \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{2}. \qquad (**)$$

[1] Творческая задача.

Заметим, что уравнения (**) являются *каноническими уравнениями прямой* l.

7.141. Найдите точку пересечения прямой l:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = -1 + t \end{cases}$$

и плоскости α: $x + y + 2z - 3 = 0$.

Решение. Обозначим $K = l \cap \alpha$. Координаты точки K удовлетворяют уравнениям прямой l и плоскости α, поэтому являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0, \\ x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Подставив в уравнение $x + y + 2z - 3 = 0$ вместо x, y, z их выражения через t, имеем $(1 - 2t) + (2 + 3t) + 2(-1 + t) - 3 = 0$, откуда $t = \frac{2}{3}$. При $t = \frac{2}{3}$ получаем координаты точки K: $x = 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$, $y = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 4$; $z = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$, т. е. $K\left(-\frac{1}{3}; 4; -\frac{1}{3}\right)$. Проверьте, что точка K является искомой.

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; 4; -\frac{1}{3}\right)$.

7.142. (*Устно.*) Прямая задана точками $A(3; -1; 2)$ и $B(-1; 1; 2)$. Определите взаимное положение прямой AB и плоскости Oxy.

7.143. Докажите, что прямая, заданная точками $A(-6; 5; 1)$ и $B(-3; 5; -2)$, параллельна плоскости $x - 3y + z + 3 = 0$.

7.144. Найдите точку пересечения прямой

$$\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = -4t \end{cases}$$

и плоскости $x + 2y - z + 1 = 0$.

7.145. © Найдите угол между прямой

$$\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = -4t \end{cases}$$

и плоскостью $x + 2y - z + 1 = 0$.

7.146. Найдите угол между прямыми:

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$ и $\frac{x}{-4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-1}$;

б)

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = -2 + t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

7.147. ☺ Как расположены точки $M(-1;\ 1;\ 2)$, $N(3;\ 5;\ 8)$ и $K(0;\ 3;\ 4)$ относительно прямой

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 + 2t? \end{cases}$$

7.148. ♉ При каких значениях α и β точка $M(1;\ 5;\ 8)$ лежит на прямой

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 7 - \alpha t, \\ z = 8 + \beta t? \end{cases}$$

7.149. ♉ Напишите параметрические уравнения каждой из прямых, по которым плоскость $3x + 8y + z = 11$ пересекается с координатными плоскостями.

7.150. ♉ Напишите параметрические уравнения прямой AB и найдите точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями, если $A(-8;\ 1;\ 3)$ и $B(1;\ -5;\ -1)$.

7.151. ☺ Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат и делящей пополам отрезок MN, если $M(-3;\ 8;\ 1)$ и $N(1;\ 0;\ 7)$.

7.152. Напишите уравнения прямой, проходящей через начало координат и параллельной прямой

$$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 7t. \end{cases}$$

7.153. Какому условию должны удовлетворять числа α и β, чтобы прямые

$$\begin{cases} x = 3 - 5t, \\ y = 2 + t, \\ z = \alpha t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = u, \\ y = 5 - \beta u, \\ z = 2 - u \end{cases}$$

были взаимно перпендикулярны?

7.154. ☺ Найдите величину угла между прямыми

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = t, \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1 + 3u, \\ y = 5 - u, \\ z = 3 - 2u. \end{cases}$$

7.155. ☺ Найдите величину угла между осью аппликат и прямой

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 2t. \end{cases}$$

7.156. ♉ Определите взаимное расположение прямых

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 5 - t, \\ z = 2 + 7t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1 - 2u, \\ y = 6 + u, \\ z = -5 - 7u. \end{cases}$$

7.157. Определите взаимное расположение прямых

$$\begin{cases} x = 5 + 7t, \\ y = 2 - t, \\ z = 9 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3 - 2u, \\ y = 5 + 3u, \\ z = 8 - u. \end{cases}$$

7.158. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Начало координат находится в точке B, оси координат проходят через точки A, B_1 и C. 1) Напишите уравнения: а) плоскостей, содержащих его грани; б) плоскостей, проходящих через два его параллельных ребра, не лежащих в одной грани; в) плоскости AB_1C; г) плоскости, проходящей через центр куба перпендикулярно его грани; д) плоскости, проходящей через центр куба перпендикулярно его диагонали. 2) Найдите расстояние: а) от вершины C_1 до плоскости A_1BD; б) между плоскостями A_1C_1D и ACB_1; в) между скрещивающимися диагоналями граней ABB_1A_1 и $ABCD$.

7.159. ♉ Определите взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 1 + 5t, \\ y = 1 - 3t, \\ z = t \end{cases}$$

и плоскости $2x + 3y - z - 5 = 0$.

7.160. Определите взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 1, \\ z = 6 + 2t \end{cases}$$

и координатных плоскостей.

7.161. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(0; 3; 4)$ и перпендикулярной плоскости $5x + 2y - z - 5 = 0$. Найдите координаты точки пересечения этой прямой и данной плоскости.

7.162. Найдите величину угла между прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + t \end{cases}$$

и плоскостью $2x - 3y + z - 1 = 0$.

7.163. Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой

$$\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 2t, \\ z = 5 + 3t. \end{cases}$$

Найдите координаты точки пересечения этой плоскости и данной прямой.

7.164. ♉ В каком отношении плоскость $2x + 3y + 5z - 20 = 0$ делит отрезок прямой AB, если $A(2; 1; 1)$ и $B(7; 10; 0)$?

7.165. ♉ Определите взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 4 + t \end{cases}$$

и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

7.166. (*Устно.*) Докажите, что прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{3}$ и плоскость $x - y + z - 1 = 0$ пересекаются.

7.167. Напишите уравнения прямой, проходящей через середину отрезка MN и параллельной оси ординат, если $M(-3; 1; 5)$ и $N(7; -1; -5)$.

7.168. ♉ Напишите параметрические уравнения прямой, по которой пересекаются плоскости $2x + 3y - z = 6$ и $x + y + z = 1$.

7.169. Определите взаимное расположение прямой AB и прямых, соответствующих осям координат, если $A(-1;\ 2;\ 4)$ и $B(8;\ 3;\ 6)$.

7.170. Напишите уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;\ 3;\ -2)$ перпендикулярно оси ординат и прямой

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 1 - 5t. \end{cases}$$

7.171. Напишите уравнения прямой, проходящей через точку $L(-1;\ 2;\ 3)$ перпендикулярно оси абсцисс, и прямой пересечения плоскостей $3x + y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 3z = 0$.

7.172. ♉ Найдите расстояние от точки $A(3;\ -1;\ 1)$ до прямой

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 - 8t, \\ z = 5 - 4t. \end{cases}$$

7.173. ♉ Определите взаимное расположение прямых

$$\begin{cases} x = 7 + 3t, \\ y = 2 - t, \\ z = 8 + 0{,}5t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 5 - 6u, \\ y = 8 + 2u, \\ z = 1 - u. \end{cases}$$

7.174. Дана точка $A(2;\ 3;\ 5)$. Пусть A_1, A_2, A_3 — ортогональные проекции точки A на координатные плоскости соответственно Oxy, Oyz, Oxz. 1) Составьте уравнение плоскости $\alpha = (A_1A_2A_3)$. 2) Найдите: а) расстояния от начала координат и от точки A до плоскости α; б) координаты точки пересечения прямой OA и плоскости α; в) отношение, в котором плоскость α делит отрезок OA, считая от точки A; г) угол между плоскостями: α и Oxy; α и OAA_1; д) угол между прямой A_2A_3 и плоскостью AA_1A_3; е) расстояние от точки A_1 до прямой A_2A_3.

7.175. ☺ Составьте уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;\ 1;\ 1)$ и перпендикулярной прямым

$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -3 + 3t, \\ z = t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3t, \\ y = -2 + t, \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$$

7.176. Найдите расстояние между прямыми

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

7.177. Определите взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = 3 \end{cases}$$

и плоскости $2x + y - 5z - 1 = 0$.

7.178. Определите взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 5 - t \end{cases}$$

и плоскости $x + y + 5z = 0$.

7.179. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3;\ 8;\ 1)$ параллельно плоскости $2x + y + z = 0$ и пересекающей ось Oy.

7.180. Определите взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 5 - 12t, \\ z = 12 + 5t \end{cases}$$

и сферы $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 169$.

7.181. Определите взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 7 - t, \\ z = 15 + 9t \end{cases}$$

и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задачи к § 26

7.182. Найдите расстояние от точки $K(1;\ -2;\ 3)$ до плоскости $3x + 2y - 6z + 5 = 0$.

Решение. Находим координаты вектора нормали $\vec{n}$ к плоскости: $\vec{n}(3;\ 2;\ -6)$. Тогда

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-6) \cdot 3 + 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{|-14|}{7} = 2.$$

Ответ: 2.

7.183. Найдите множество точек, равноудаленных от плоскостей $2x + 2y - z - 3 = 0$ и $3x + 4y + 12z - 13 = 0$.

Решение. Пусть точка $M(x; y; z)$ равноудалена от данных плоскостей, тогда

$$\frac{|2x + 2y - z - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3x + 4y + 12z - 13|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}},$$

$$\text{т. е. } \frac{|2x + 2y - z - 3|}{3} = \frac{|3x + 4y + 12z - 13|}{13}.$$

Данное уравнение распадается на совокупность двух уравнений

$$\frac{2x + 2y - z - 3}{3} = \frac{3x + 4y + 12z - 13}{13}$$

или

$$\frac{2x + 2y - z - 3}{3} = -\frac{3x + 4y + 12z - 13}{13}.$$

После упрощения получим уравнения двух плоскостей

$$17x + 14y - 49z = 0 \quad \text{и} \quad 35x + 38y + 23z - 78 = 0.$$

Подумайте, почему эти плоскости получились взаимно перпендикулярными и как они связаны с данными в задаче плоскостями.

7.184. Найдите расстояние от точки $M(-3; 1; 2)$ до плоскости $3x + 4y - 12z + 2 = 0$.

7.185. ☺ Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точку $A(1; -3; 8)$, если расстояние от плоскости до точки $M(1; 1; 0)$ равно 1.

7.186. ♉ Напишите уравнение плоскости, содержащей ось Oy, если расстояние от этой плоскости до точки $M(-3; 8; 1)$ равно 1.

7.187. ♉ Найдите геометрическое место точек, расстояние которых до плоскости $2x - 3y + z - 1 = 0$ равно расстоянию до плоскости $2x - 3y + z + 5 = 0$.

7.188. ♉ Найдите геометрическое место точек, удаленных от плоскости $x + 2y - 2z - 5 = 0$ на расстояние 2.

7.189. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от плоскостей $3x + 12y - 4z - 1 = 0$ и $4x - 3y + 12z + 5 = 0$.

7.190. ☺ В каком отношении плоскость $3x - 5y + 2z - 5 = 0$ делит отрезок AB, если $A(3; 2; 1)$ и $B(7; -1; 2)$?

7.191. ☺ Найдите расстояние между плоскостью, заданной уравнением $2x + 3y - 5z + 1 = 0$, и прямой

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

7.192. ☺ Найдите расстояние между параллельными плоскостями $3x + 2y + 4z + 11 = 0$ и $9x + 6y + 12z - 5 = 0$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 7

7.193. ♉ Найдите центры всех сфер, проходящих через точки $A(0; 5; 12)$, $B(4; -3; 12)$ и $C(12; -4; -3)$.

7.194. ♉ Найдите координаты центра и радиус сферы, описанной около тетраэдра, вершины которого имеют координаты $(0; 0; 0)$, $(8; 0; 0)$, $(0; -2; 0)$ и $(0; 0; -6)$.

7.195. Найдите координаты центров всех сфер радиуса 1, касающихся каждой из плоскостей $x = 0$, $y = 1$, $z = 5$.

7.196. Найдите множество таких точек $P(x; y; z)$, что сумма квадратов расстояний от них до точек $A(3; 4; 0)$ и $B(1; 2; 3)$ равна 39.

7.197. Найдите множество точек пространства, сумма квадратов расстояний которых до вершин треугольника ABC равна 32, если $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 4)$ и $C(1; -1; 0)$.

7.198. ♉ Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки сферы, описанной около куба, до всех вершин куба есть величина постоянная. Найдите эту величину.

7.199. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки шара, вписанного в куб, до всех вершин куба есть величина постоянная. Найдите эту величину.

7.200. Докажите, что геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до всех вершин октаэдра с ребром 1, равна 6, есть описанный около октаэдра шар.

7.201. Найдите геометрическое место точек таких, что сумма квадратов расстояний от них до вершин правильной треугольной призмы, все ребра которой имеют длину 1, равна 5.

7.202. ♉ Найдите множество точек, сумма квадратов расстояний которых до осей координат равна 2.

7.203. ♉ Найдите множество точек, сумма квадратов расстояний которых до плоскостей $x = 0$, $y - 2 = 0$, $z + 1 = 0$ равна 4.

7.204. ♉ Напишите уравнение плоскости, параллельной прямой

$$\begin{cases} x = 8 + t, \\ y = 1 - 8t, \\ z = 3t \end{cases}$$

и содержащей ось Oz.

7.205. ♉ Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и содержащей прямую

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 5 - t, \\ z = t. \end{cases}$$

7.206. ♉ Существуют ли плоскости, проходящие через прямые

$$\begin{cases} x = 5 - t, \\ y = 2 + 7t, \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = 1? \end{cases}$$

Если да, то напишите все их уравнения.

7.207. Существуют ли плоскости, проходящие через прямые

$$\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 2 + 5t, \\ z = t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2 + u, \\ y = 1 - 5u, \\ z = 1 - u? \end{cases}$$

Если да, то напишите все их уравнения.

7.208. Найдите длину хорды, отсекаемой на прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = t, \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

сферой $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 25$.

7.209. ♉ Найдите все точки на оси Oz, через которые проходит хотя бы одна прямая, касающаяся сферы[1] $(x-1)^2 + (y + 2)^2 + (z+2)^2 = 9$ в точке $P(3; -1; -4)$.

7.210. ♉ Из начала координат проведены всевозможные прямые, касающиеся сферы[1] $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-12)^2 = 144$. Найдите уравнение плоскости, в которой лежат все точки касания.

7.211. ♉ Найдите уравнения всех сфер с центром в начале координат, касающихся прямой[1]

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 5. \end{cases}$$

7.212. В плоскости $x + y + 2z = 0$ найдите все прямые, касающиеся сферы[1] $(x-2)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ и проходящие через начало координат.

7.213. ♉ Напишите уравнения проекций прямой

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 5 \end{cases}$$

на координатные плоскости.

7.214. ♉ На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ найдите точки, расстояния от которых до прямой

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 2 - t, \\ z = 1 - 2t: \end{cases}$$

а) наименьшее; б) наибольшее.

---

[1] Прямая, касающаяся сферы, имеет со сферой одну общую точку.

7.215. Напишите уравнения центров всех сфер, касающихся всех координатных осей.

7.216. ♉ Найдите геометрическое место центров таких шаров, что все точки прямых

$$\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2 + 3u, \\ y = 2u, \\ z = 6, \end{cases}$$

для которых $t \in [-1; 3]$, $u \in [0; 6]$, принадлежат шарам, а другие точки этих прямых шарам не принадлежат.

7.217. ♉ Найдите геометрическое место точек пространства, сумма квадратов расстояний от которых до вершин куба численно в два раза больше площади полной поверхности этого куба.

7.218. ♉ Найдите геометрическое место точек M пространства, для которых выполняется условие $AM : BM = 5 : 3$, если $A(0; -1; 1)$ и $B(0; 1; 0)$.

Д1 МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

Ранее мы уже строили плоские сечения многогранников. Эти построения осуществлялись на основании аксиом стереометрии и теорем о параллельности прямых и плоскостей.

Вместе с тем, существуют определенные методы построения плоских сечений многогранников. Наиболее эффективными в школьном курсе геометрии являются следующие три метода: 1) *метод следов*; 2) *метод внутреннего проектирования*; 3) *комбинированный метод*.

1.1. Метод следов

Определение. Прямая, по которой секущая плоскость α пересекает плоскость основания многогранника, называется следом плоскости α в плоскости этого основания.

Из определения следа следует, что в каждой его точке пересекаются прямые, одна из которых лежит в секущей плоскости, другая — в плоскости основания. Именно это свойство следа используют при построении плоских сечений многогранников методом следов. Причем в секущей плоскости удобно использовать такие прямые, которые пересекают ребра многогранника.

Рассмотрим метод следов на примерах. Секущую плоскость зададим ее следом в плоскости основания призмы (пирамиды) и точкой, принадлежащей поверхности призмы (пирамиды).

■ ЗАДАЧА 1. Построить сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью α, которая задана следом l в плоскости ABC основания призмы и точкой M, принадлежащей ребру DD_1.

Решение.

Анализ. Предположим, что пятиугольник $MNPQR$ — искомое сечение (рис. 64). Для построения этого плоского пятиугольника достаточно построить его вершины N, P, Q, R (точка M дана) — точки пересечения секущей плоскости α с ребрами со-

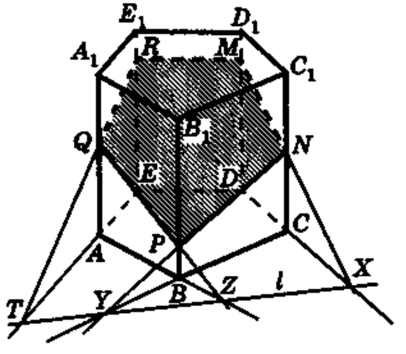


Рис. 64

ответственно CC_1, BB_1, AA_1, EE_1 данной призмы (или их продолжениями).

Для построения точки $N = \alpha \cap CC_1$ достаточно построить прямую MX пересечения секущей плоскости α с гранью CDD_1C_1. Эта прямая будет построена, если построить точку X пересечения следа l с гранью CDD_1C_1.

Так как прямая l лежит в плоскости основания призмы, то она может пересекать грань CDD_1C_1 лишь в точке, которая принадлежит прямой CD пересечения плоскости грани CDD_1C_1 с плоскостью основания призмы, т. е. точка $X = l \cap (CDD_1)$ является точкой пересечения следа l с прямой CD: $l \cap (CDD_1) = X = l \cap CD$.

Таким образом, для построения точки N достаточно построить точку $X = l \cap CD$.

Аналогично, для построения точек P, Q и R достаточно построить точки $Y = l \cap BC$, $Z = l \cap AB$ и $T = l \cap AE$. Отсюда

Построение. Строим: 1) $X = l \cap CD$; 2) $N = MX \cap CC_1$; 3) $Y = l \cap \cap BC$; 4) $P = NY \cap BB_1$; 5) $Z = l \cap AB$; 6) $Q = PZ \cap AA_1$; 7) $T = l \cap \cap AE$; 8) $R = QT \cap EE_1$. Пятиугольник $MNPQR$ — искомое сечение.

Доказательство. Так как прямая l — след секущей плоскости α, то точки X, Y, Z и T принадлежат этой плоскости. Поэтому:

$$M \in \alpha, X \in \alpha \Rightarrow MX \subset \alpha \Rightarrow MX \cap CC_1 = N \in \alpha; N = \alpha \cap CC_1;$$

$$N \in \alpha, Y \in \alpha \Rightarrow NY \subset \alpha \Rightarrow NY \cap BB_1 = P \in \alpha; P = \alpha \cap BB_1;$$

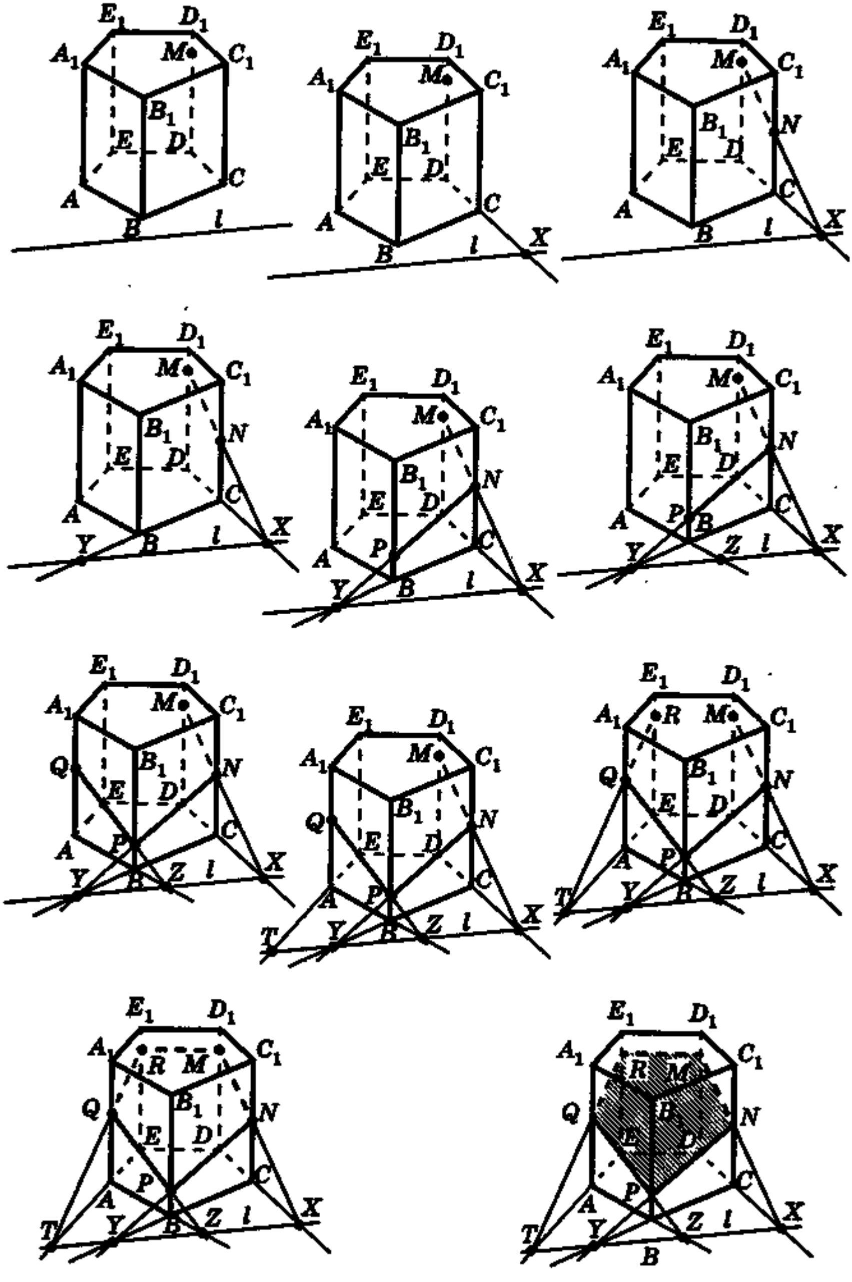


Рис. 65

$$P \in \alpha, Z \in \alpha \Rightarrow PZ \subset \alpha \Rightarrow PZ \cap AA_1 = Q \in \alpha;\ Q = \alpha \cap AA_1;$$

$$Q \in \alpha, T \in \alpha \Rightarrow QT \subset \alpha \Rightarrow QT \cap EE_1 = R \in \alpha;\ R = \alpha \cap EE_1.$$

Следовательно, $MNPQR$ — искомое сечение.

Исследование. След l секущей плоскости α не пересекает основание призмы, а точка M секущей плоскости принадлежит боковому ребру DD_1 призмы. Поэтому секущая плоскость α не параллельна боковым ребрам. Следовательно, точки N, P, Q и R пересечения этой плоскости с боковыми ребрами призмы (или продолжениями этих ребер) всегда существуют. А поскольку, кроме того, точка M не принадлежит следу l, то определяемая ими плоскость α единственна. Значит, задача имеет (всегда!) единственное решение.

Динамику этого построения плоского сечения призмы можно видеть на рисунке 65.

■ ЗАДАЧА 2. Постройте сечение пятиугольной пирамиды $PABCDE$ плоскостью, которая задана следом l и точкой K ребра PE.

Решение. Схематически построение искомого сечения можно изобразить так (рис. 66):

$$T_1 \to Q \to T_2 \to R \to T_3 \to M \to \to T_4 \to N.$$

«Цепочка» последовательности построения вершин сечения такова:

1) $T_1 = l \cap AE$;
2) $Q = T_1K \cap PA$;
3) $T_2 = l \cap AB$;
4) $R = T_2Q \cap PB$;
5) $T_3 = l \cap BC$;
6) $M = T_3R \cap PC$;
7) $T_4 = l \cap CD$;
8) $N = T_4M \cap PD$.

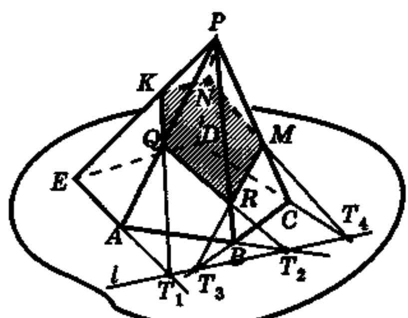


Рис. 66

Пятиугольник $MNKQR$ — искомое сечение.

Секущая плоскость чаще всего задается тремя точками, принадлежащими многограннику.

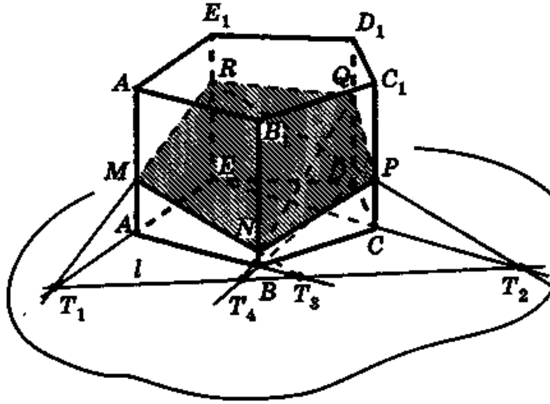


Рис. 67

ЗАДАЧА 3. Постройте сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью $\alpha = (MPR)$, где M, P и R являются точками соответственно ребер AA_1, CC_1 и EE_1 (рис. 67).

Решение. Построим след секущей плоскости α в плоскости основания ABC данной призмы.

Прямые MR и PR лежат в секущей плоскости α, а прямые AE и CE — в плоскости основания ABC. Тогда на основании свойства (какого?) точек следа секущей плоскости строим точки: 1) $T_1 = MR \cap AE$; 2) $T_2 = PR \cap CE$; T_1, T_2 — точки следа.

Значит, прямая $T_1T_2 = l$ — след секущей плоскости в плоскости основания призмы. Далее строим точки: 3) $T_3 = l \cap AB$; 4) $N = T_3M \cap BB_1$; 5) $T_4 = l \cap BD$; 6) $Q = T_4N \cap DD_1$.

$MNPQR$ — искомое сечение.

ЗАДАЧА 4. Постройте сечение пятиугольной пирамиды $PABCDE$ плоскостью $\alpha = (KQR)$, где K, Q — точки ребер соответственно PA и PC, а точка R лежит внутри грани DPE (рис. 68).

Решение. Построим след секущей плоскости в плоскости основания пирамиды, для чего построим две любые его точки.

Прямые QK и AC лежат в одной плоскости ACP и пересекаются в точке T_1, принадлежащей этому следу (почему?). Далее — ***внимание! Ответственный момент!***

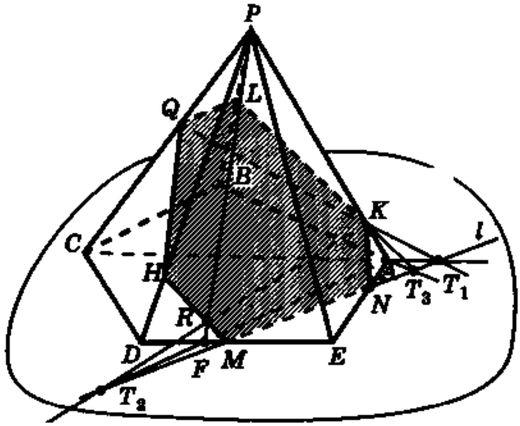


Рис. 68

Плоскость APR содержит прямую RK, лежащую в секущей плоскости α, и пересекает сторону DE основания пирамиды в некоторой точке F (F является точкой пересечения прямых PR и DE). Тогда прямые KR и AF лежат в одной плоскости APR и пересекаются в некоторой точке T_2 — второй точке следа (почему?). Значит, прямая $T_1T_2 = l$ — след секущей плоскости α в плоскости основания пирамиды.

След l пересекает стороны DE и AE основания пирамиды соответственно в точках M и N, которые служат вершинами искомого сечения.

Вершина H искомого сечения получается при пересечении прямых MR и PD. Далее, построив точку $T_3 = l \cap AB$ и проведя прямую T_3K, получаем вершину L искомого сечения: $L = T_3K \cap PB$.

Таким образом, «цепочка» последовательности построения вершин искомого сечения такова: 1) $T_1 = QK \cap AC$; 2) $F = PR \cap DE$; 3) $T_2 = KR \cap AF$; $T_1T_2 = l$ — след; 4) $M = l \cap DE$; 5) $N = l \cap AE$; 6) $H = MR \cap PD$; 7) $T_3 = l \cap AB$; 8) $L = T_3K \cap PB$. $MNKLQH$ — искомое сечение.

Динамика построения этого сечения проиллюстрирована на рисунке 69.

Для построения следа секущей плоскости в плоскости основания многогранника достаточно построить две любые точки

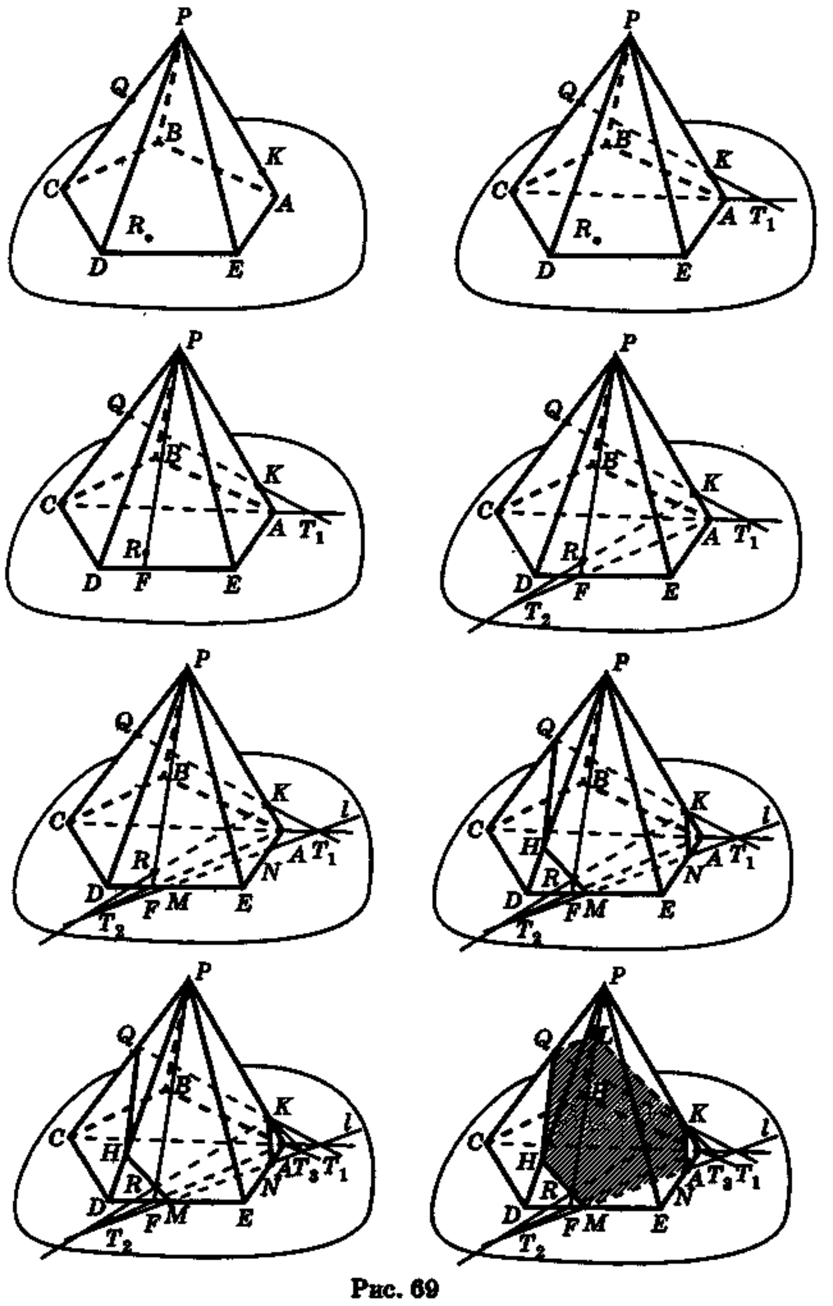
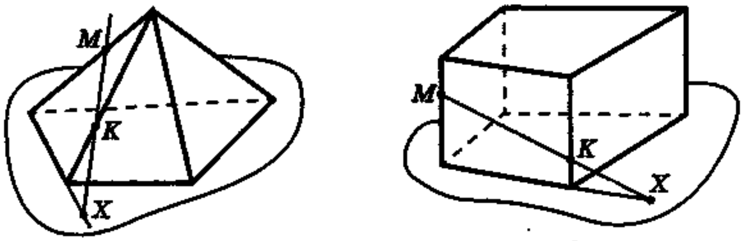


Рис. 69

этого следа. Этими точками являются, как правило, точки пересечения плоскости основания данного многогранника и прямой, лежащей в секущей плоскости.

На рисунках 70—74 проиллюстрировано построение точки X пересечения прямой MK с плоскостью основания пирамиды (призмы), если точки M и K, принадлежат:

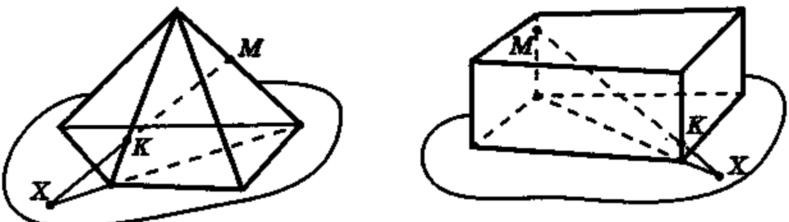
1) боковым ребрам одной грани многогранника;



а) *б)*

Рис. 70

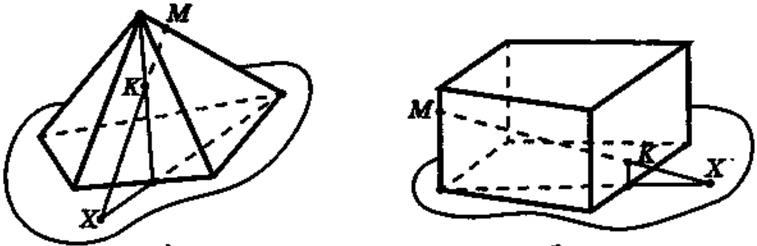
2) боковым ребрам диагонального сечения многогранника;



а) *б)*

Рис. 71

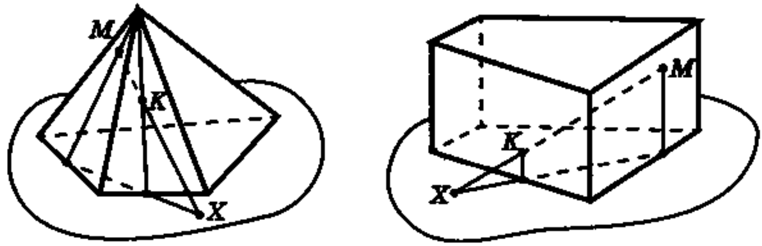
3) боковой грани многогранника и не принадлежащему ей боковому ребру;



а) *б)*

Рис. 72

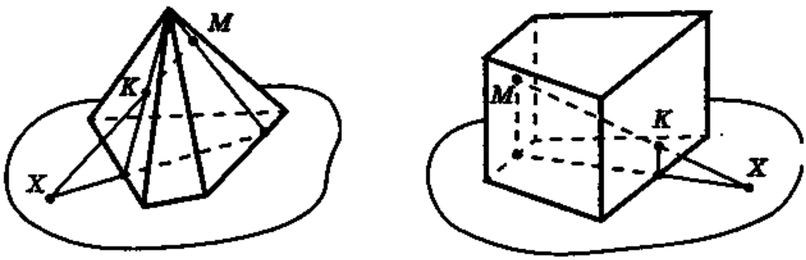
4) двум смежным боковым граням многогранника;



а) *б)*

Рис. 73

5) двум несмежным боковым граням многогранника.



а) *б)*

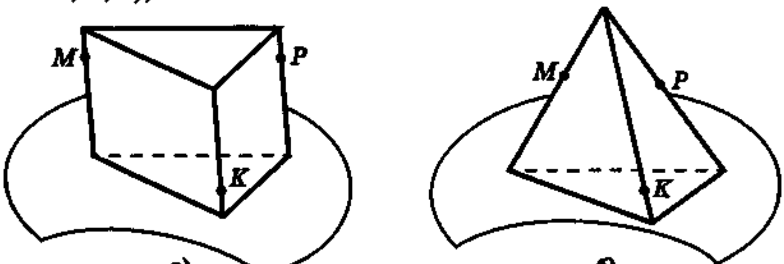
Рис. 74

Задачи

5. Постройте точку пересечения прямой с плоскостью основания четырехугольной пирамиды (призмы), если прямая задана двумя точками, которые принадлежат: а) боковым ребрам одной грани; б) боковым ребрам, не лежащим в одной грани; в) боковому ребру и боковой грани; г) двум смежным боковым граням; д) двум несмежным боковым граням; е) ребрам диагонального сечения.

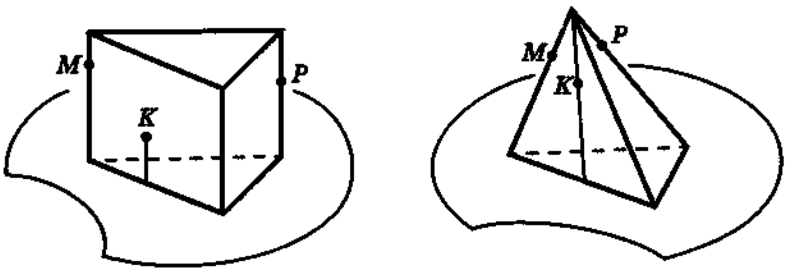
6. Секущая плоскость α задана тремя точками M, P, K (рис. 75). Постройте след секущей плоскости в плоскости основания треугольной пирамиды и треугольной призмы, если:

1) точки принадлежат боковым ребрам призмы (пирамиды) (рис. 75, *а*, *б*);



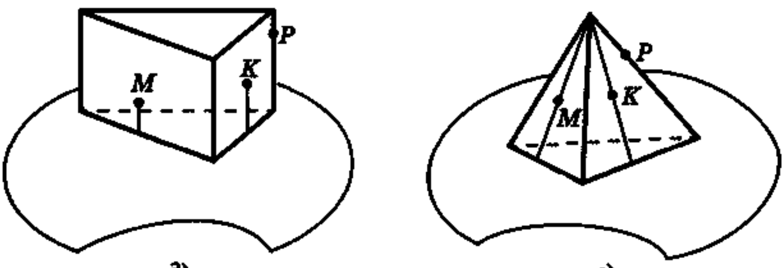
а) *б*)

2) две из них принадлежат боковым ребрам, а третья — боковой грани (рис. 75, *в*, *г*);



в) *г*)

3) две из них принадлежат боковым граням, а третья — боковому ребру (рис. 75, *д*, *е*).



д) *е*)

Рис. 75

7. Постройте сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью α, заданной следом l в плоскости основания и точкой M, которая принадлежит ребру DD_1, если след: а) не имеет общих точек с основанием призмы; б) проходит через сторону AB основания призмы; в) пересекает стороны AE и BC основания призмы.

8. Постройте сечение пирамиды $PABCDE$ плоскостью α, заданной следом l и точкой M, которая принадлежит ребру PE, если след l: а) не имеет общих точек с основанием пирамиды; б) проходит через сторону BC основания; в) пересекает стороны BA и BC основания.

9. Постройте сечение пирамиды $PABCDE$ плоскостью, заданной: а) точками M, N, Q ребер соответственно PC, PE, PA; б) точками, две из которых принадлежат боковым ребрам, третья — боковой грани.

10. Постройте сечение пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью, которая задана следом l, проходящим через сторону AB основания, и точкой P, принадлежащей ребру CC_1. Точку P выберите так, чтобы в сечении получился: а) четырехугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник.

11. Постройте сечение пятиугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками, принадлежащими трем боковым граням.

12. Постройте сечение пятиугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками, две из которых принадлежат боковым ребрам, а третья — стороне основания.

13. Постройте сечение пятиугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками, две из которых принадлежат боковым граням, а третья — основанию призмы.

В задачах 14—28 постройте сечение куба плоскостью MRP методом следов (рис. 76—90).

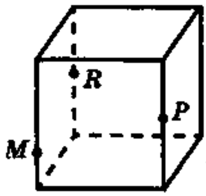


Рис. 76

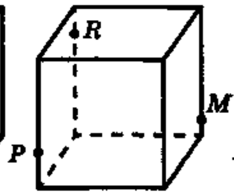


Рис. 77

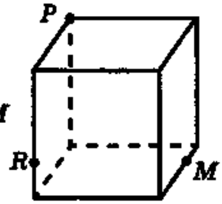


Рис. 78

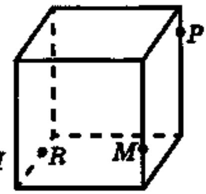


Рис. 79

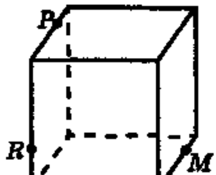


Рис. 80

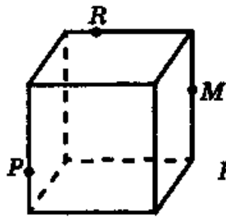


Рис. 81

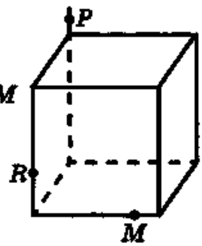


Рис. 82

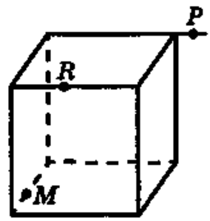


Рис. 83

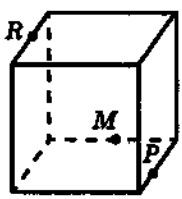
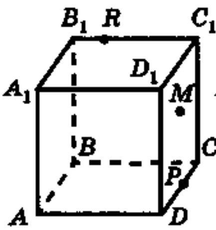
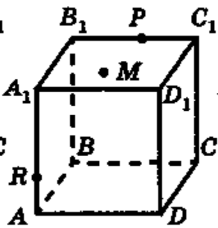


Рис. 84



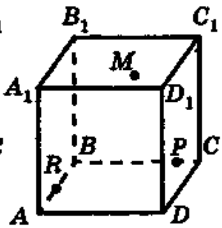
$M \in (BB_1C_1)$

Рис. 85



$M \in (A_1B_1C_1)$

Рис. 86



$M \in (A_1B_1C_1)$

Рис. 87

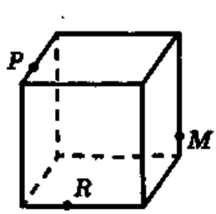
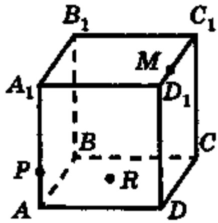
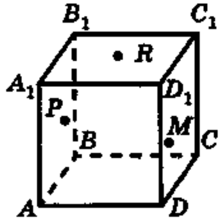


Рис. 88



$R \in (ABC)$

Рис. 89



$P \in (AA_1B_1)$
$R \in (A_1B_1C_1)$
$M \in (DD_1C_1)$

Рис. 90

1.2. Метод внутреннего проектирования

В некоторых учебных пособиях метод построения сечений многогранников, который мы сейчас будем рассматривать, называют ***методом внутреннего проектирования*** или ***методом соответствий***, или ***методом диагональных сечений***. Мы примем первое название этого метода.

Сущность метода внутреннего проектирования рассмотрим на примерах построения сечений призмы и пирамиды.

■ ЗАДАЧА 29. Постройте сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью α, заданной точками $M \in BB_1$, $P \in DD_1$, $Q \in EE_1$.

Решение. Плоскость нижнего основания призмы обозначим β.

Для построения искомого сечения построим точки пересечения плоскости α с ребрами (или их продолжениями) призмы (рис. 91).

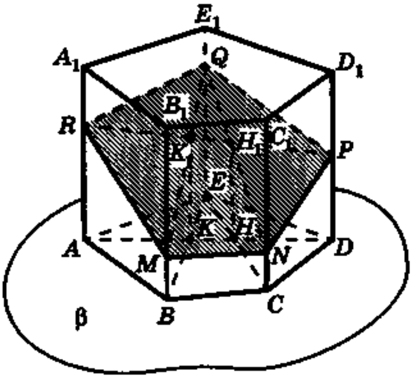


Рис. 91

Построим точку пересечения секущей плоскости α с ребром AA_1.

Плоскости A_1AD и BEE_1 пересекают плоскость β по прямым соответственно AD и BE, которые пересекаются в некоторой точке K: $K = AD \cap BE$. Эти плоскости проходят через параллельные ребра AA_1 и BB_1 призмы и имеют общую точку K. Поэтому прямая их пересечения проходит через точку K и параллельна ребру BB_1 (т. 11). Точку пересечения этой прямой с прямой QM (почему они пересекаются?) обозначим $K_1 = KK_1 \cap QM$, $KK_1 \parallel BB_1$.

Прямая PK_1 лежит в секущей плоскости α и пересекает (почему?) ребро AA_1 в некоторой точке R. Точка R служит точкой пересечения плоскости α и ребра AA_1: $R = PK_1 \cap AA_1 = \alpha \cap \cap AA_1$, т. е. точка R является вершиной искомого сечения.

Аналогично строим точку N пересечения плоскости α и ребра CC_1.

Таким образом, последовательность «шагов» построения искомого сечения такова: 1) $K = AD \cap BE$; 2) $K_1 = KK_1 \cap MQ$;

$KK_1 \parallel BB_1$; 3) $R = PK_1 \cap AA_1$; 4) $H = EC \cap AD$; 5) $H_1 = HH_1 \cap \cap PR$, $HH_1 \parallel CC_1$; 6) $N = QH_1 \cap CC_1$. Пятиугольник $MNPQR$ — искомое сечение.

■ ЗАДАЧА 30. Постройте сечение пирамиды $PABCDE$ плоскостью $\alpha = (MFR)$, если точки M, F и R являются внутренними точками ребер соответственно PA, PC и PE (рис. 92).

Решение. Плоскость основания пирамиды обозначим β.

Для построения искомого сечения построим точки пересечения секущей плоскости α с ребрами (или с их продолжениями) пирамиды.

Рассмотрим построение точки пересечения секущей плоскости с ребром PD пирамиды.

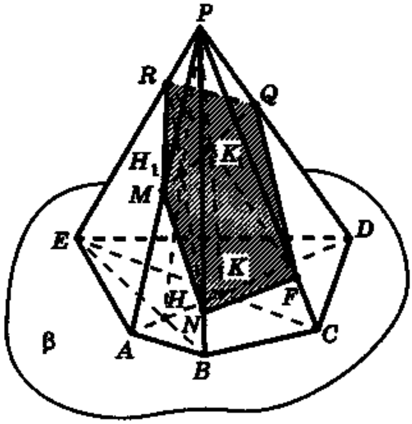


Рис. 92

Плоскости APD и CPE пересекают плоскость β по прямым соответственно AD и CE, которые пересекаются в некоторой точке K. Тогда прямая PK, по которой пересекаются плоскости APD и CPE, пересекает прямую FR (почему?) в некоторой точке K_1: $K_1 = PK \cap FR$. Прямая MK_1 лежит в секущей плоскости α (почему?). Поэтому точка Q пересечения прямой MK_1 с ребром PD есть точка пересечения этого ребра и секущей плоскости: $Q = MK_1 \cap PD = \alpha \cap PD$.

Аналогично строим точку пересечения плоскости α и ребра PB. Плоскости BPE и APD пересекают плоскость β по прямым соответственно BE и AD, которые пересекаются в точке H. Прямая $PH = (BPE) \cap (APD)$ пересекает прямую MQ в точке H_1. Тогда прямая RH_1 пересекает ребро PB в точке N.

Таким образом, последовательность «шагов» построения искомого сечения такова:

1) $K = AD \cap EC$; 2) $K_1 = PK \cap RF$; 3) $Q = MK_1 \cap PD$; 4) $H = BE \cap AD$; 5) $H_1 = PH \cap MQ$; 6) $N = RH_1 \cap PB$.

$MNFQR$ — искомое сечение

Динамика построения этого сечения пирамиды проиллюстрирована на рисунке 93.

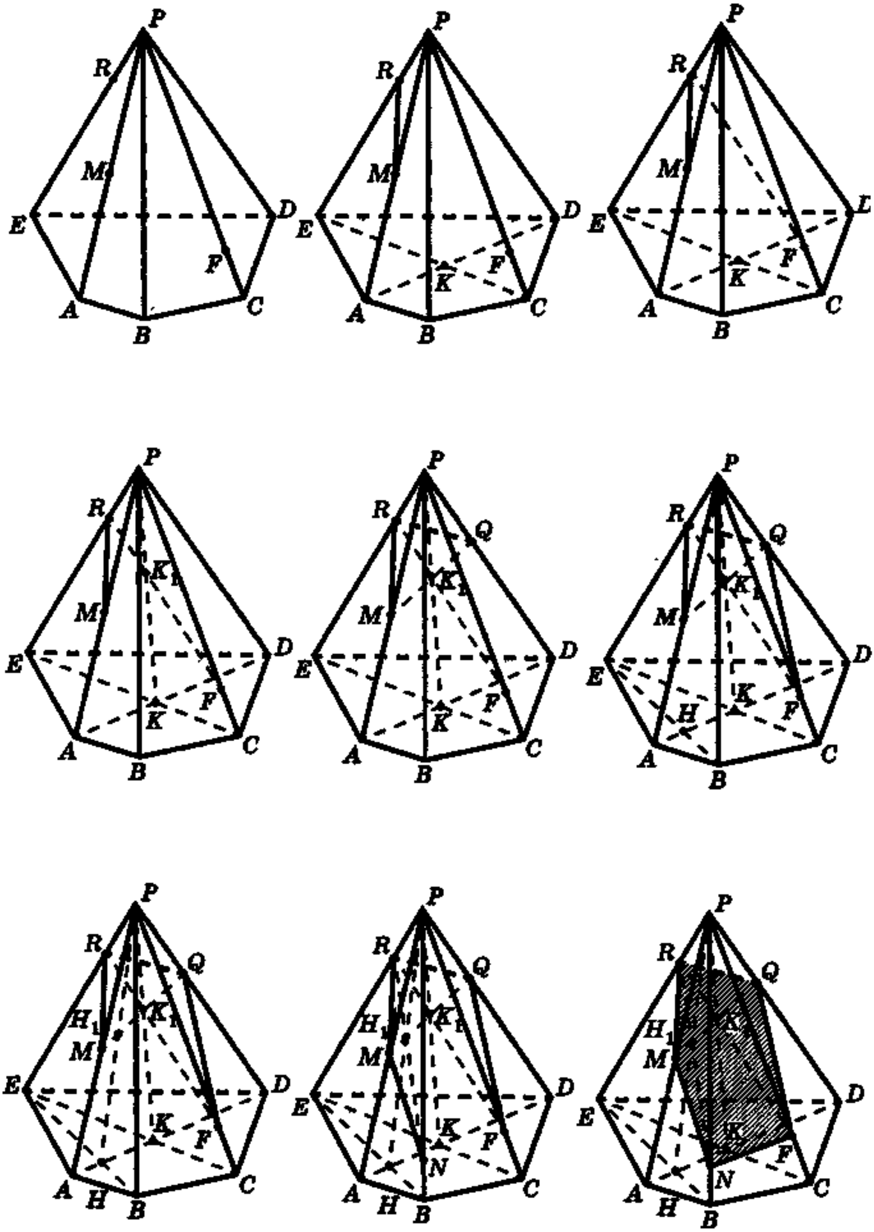
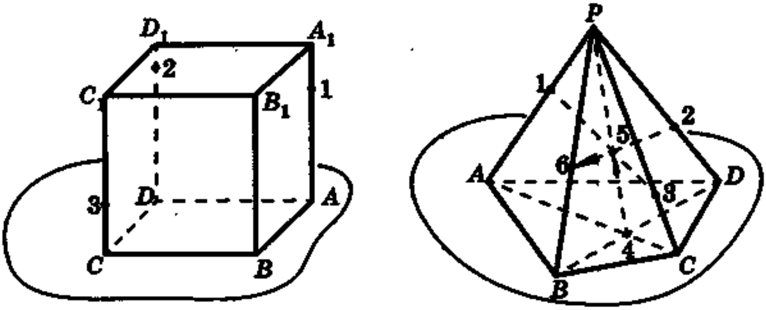

P
R
M
E
D
F
A
B
C
P
R
M
E
D
K
F
A
B
C
P
R
M
E
L
K
F
A
B
C
P
R
K_1
M
E
D
F
K
A
B
C
P
R
Q
K_1
M
E
D
F
K
A
B
C
P
R
Q
K_1
M
E
D
K
H
F
A
B
C
P
R
Q
H_1
K_1
M
E
D
K
F
A
H
B
C
P
R
Q
H_1
K_1
M
E
D
K
F
N
A
H
B
C
P
R
Q
H_1
K_1
M
E
D
K
F
N
A
H
B
C

Рис. 93

Задачи

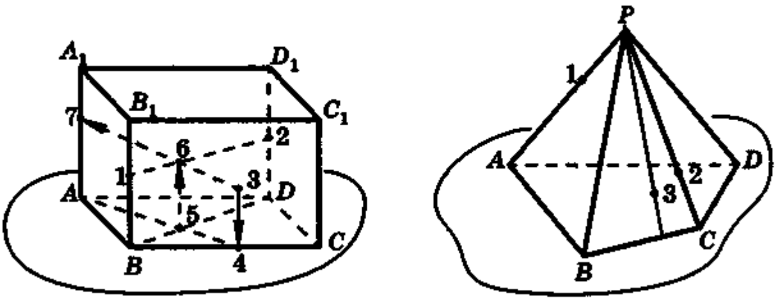
31. На рисунках 94—96 секущая плоскость задана точками 1, 2 и 3.

а) На рисунках 94, *б*, 95, *а* прокомментируйте построение точек пересечения секущей плоскости с боковыми ребрами.



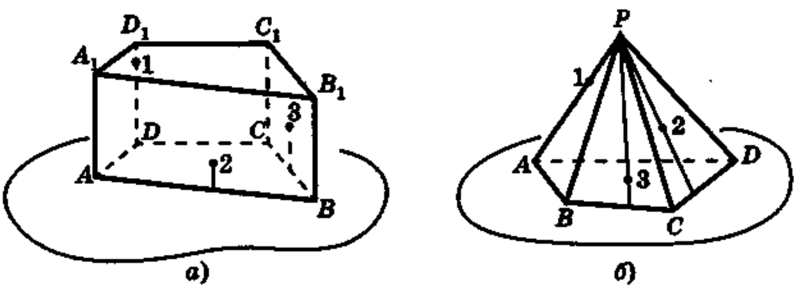
а) *б)*

Рис. 94



а) *б)*

Рис. 95



а) *б)*

Рис. 96

б) Используя рисунки 94, *а*, 95, *б*, 96, *а*, *б*, постройте точки пересечения секущей плоскости с боковыми ребрами многогранников.

В задачах 32—34 (рис. 97—99) постройте прямую пересечения плоскости NKF с плоскостью PQM.

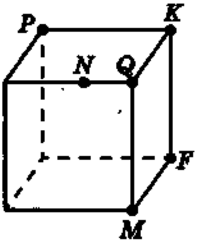


Рис. 97

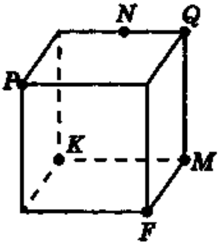


Рис. 98

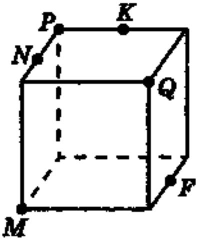


Рис. 99

35. Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками на ее боковых ребрах.

36. Постройте сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками на ее боковых ребрах.

37. Постройте сечение пятиугольной призмы плоскостью, которая проходит через три точки, если: а) две из них принадлежат боковым граням призмы, а третья — ее боковому ребру, не принадлежащему этим граням; б) две из них принадлежат боковым ребрам призмы, а третья — боковой грани, не содержащей эти ребра.

38. Постройте сечение пирамиды $PABCDE$ плоскостью, проходящей через точки M и K, принадлежащие граням соответственно ABP и ABC, и внутреннюю точку бокового ребра PE.

39. Постройте сечение пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки, две из которых принадлежат боковым несмежным граням, а третья точка совпадает с вершиной нижнего основания, не принадлежащей этим граням.

В задачах 40—54 (рис. 100—114) постройте сечение куба плоскостью MRP методом внутреннего проектирования.

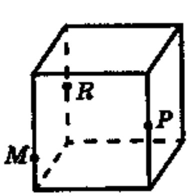


Рис. 100

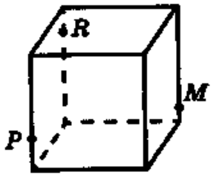


Рис. 101

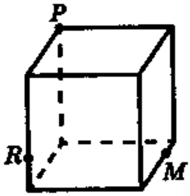


Рис. 102

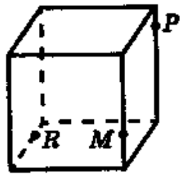


Рис. 103

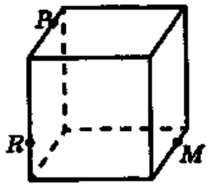


Рис. 104

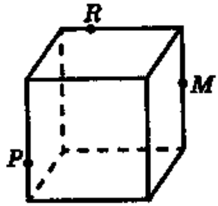


Рис. 105

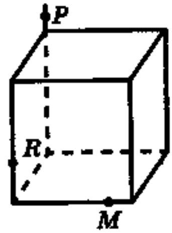


Рис. 106

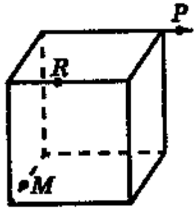


Рис. 107

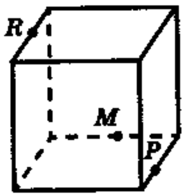
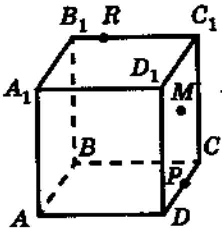
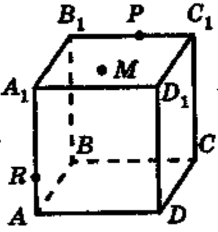


Рис. 108



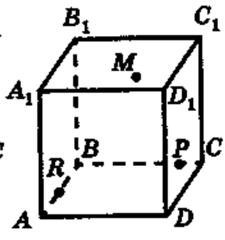
$M \in (BB_1C_1)$

Рис. 109



$M \in (A_1B_1C_1)$

Рис. 110



$M \in (A_1B_1C_1)$

Рис. 111

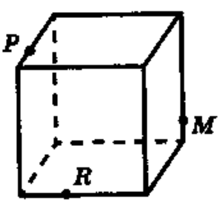
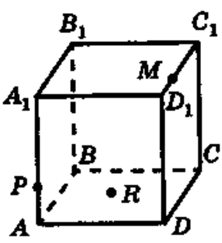
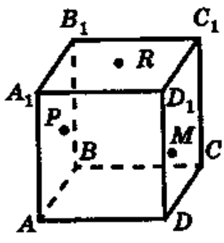


Рис. 112



$R \in (ABC)$

Рис. 113



$P \in (AA_1B_1)$
$R \in (A_1B_1C_1)$
$M \in (DD_1C_1)$

Рис. 114

1.3. Комбинированный метод

Сущность комбинированного метода построения сечений многогранников состоит в том, что на некоторых этапах построения сечения применяется или метод следов, или метод внутреннего проектирования, а на других этапах построение этого сечения осуществляется с использованием теорем, изученных в разделе «Параллельность в пространстве» и др.

Для иллюстрации применения этого метода рассмотрим следующую задачу.

■ ЗАДАЧА 55. **Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, заданной точками P, Q и R, если точка P лежит на диагонали A_1C_1, точка Q — на ребре BB_1 и точка R — на ребре DD_1 (рис. 115).**

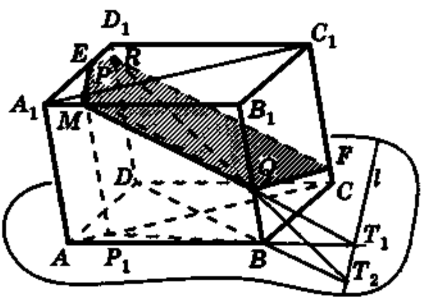


Рис. 115

Решение. а) **Решим эту задачу с применением метода следов и теорем о параллельности прямых и плоскостей.**

Прежде всего построим след секущей плоскости $\alpha = (PQR)$ на плоскости ABC. Для этого строим точки $T_1 = PQ \cap P_1B$, где $PP_1 \parallel AA_1$, $P_1 \in AC$ и $T_2 = RQ \cap BD$. Построив след T_1T_2, замечаем, что точка P лежит в плоскости $A_1B_1C_1$, которая параллельна плоскости ABC. Это означает, что секущая плоскость α пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ по прямой, проходящей через точку P и параллельной прямой T_1T_2. Пусть эта прямая пересекает ребра A_1B_1 и A_1D_1 соответственно в точках M и E. Тогда прямая ER — это прямая, по которой секущая плоскость α пересекает плоскость грани ADD_1A_1, прямая QM — это прямая, по которой секущая плоскость пересекает плоскость грани ABB_1A_1.

Далее, так как плоскость BCC_1 параллельна плоскости грани ADD_1A_1, то секущая плоскость пересекает грань BCC_1B_1 по прямой QF, параллельной прямой ER. Пятиугольник $ERFQM$ — искомое сечение. (Точку F можно получить, проведя $RF \parallel MQ$.)

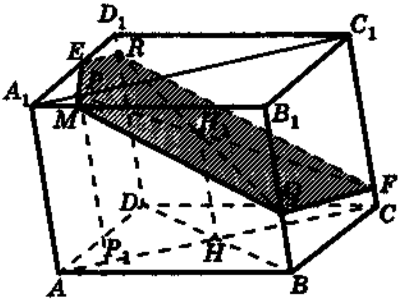


Рис. 116

б) Решим эту задачу, применяя метод внутреннего проектирования и теоремы о параллельности прямых и плоскостей.

Пусть H — точка пересечения диагоналей AC и BD (рис. 116). Проведя прямую HH_1 параллельно ребру BB_1 ($H_1 \in RQ$), построим точку F: $F = PH_1 \cap CC_1$. Точка F — это точка пересечения секущей плоскости с ребром CC_1 (почему?). Тогда прямая RF — это прямая, по которой секущая плоскость пересекает плоскость грани CC_1D_1D, прямая QF — это прямая, по которой секущая плоскость пересекает плоскость грани BCC_1B_1.

Так как плоскость ABB_1 параллельна плоскости CDD_1, то секущая плоскость пересекает грань ABB_1A_1 по прямой QM ($M \in A_1B_1$), параллельной прямой FR. Далее, если E — точка пересечения прямых MP и A_1D_1, то эта точка является точкой пересечения секущей плоскости и ребра A_1D_1 (почему?). Пятиугольник $ERFQM$ — искомое сечение. (Точку E можно построить, проведя прямую $RE \parallel FQ$. Тогда $M = PE \cap A_1B_1$.)

Задачи на построение сечений многогранников

56. Точки P, Q и R взяты на ребрах параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ следующим образом: точка P лежит на ребре CC_1, точка Q — на ребре DD_1, точка R — на ребре A_1B_1. Постройте след секущей плоскости PQR на плоскостях: а) DCC_1; б) ABC; в) ADD_1.

57. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью PQR, если $P \in CC_1$, $Q \in DD_1$, $R \in A_1B_1$. Задачу решите: а) методом следов; б) методом внутреннего проектирования; в) комбинированным методом.

58. Точки P, Q и R взяты на поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ следующим образом: точка P лежит на грани CC_1D_1D, точка Q — в грани AA_1D_1D, точка R — на ребре BB_1.

Постройте сечение параллелепипеда плоскостью PQR: а) методом внутреннего проектирования; б) комбинированным методом; в) методом следов.

59. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью PQR, если точка P лежит в грани CC_1D_1D, точка Q — в грани BB_1CC_1, точка R — на ребре BB_1.

60. Точки P, Q и R взяты на поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ следующим образом: точка P лежит на диагонали B_1D_1, точка Q — на ребре AB, точка R — на ребре CC_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью PQR, если отношения $B_1P : B_1D_1$, $AQ : AB$ и $CR : CC_1$ имеют следующие значения: а) 1 : 3, 1 : 3 и 2 : 3; б) 2 : 3, 1 : 2 и 2 : 3; в) 1 : 4, 1 : 2 и 3 : 4; г) 1 : 4, 1 : 3 и 1 : 2; д) 1 : 2, 1 : 2 и 1 : 2; е) 1 : 3, 1 : 4 и 3 : 2.

61. Точки P, Q и R взяты соответственно на ребрах B_1C_1, AA_1 и AD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте следы секущей плоскости PQR на следующих плоскостях: а) AA_1D; б) AA_1B; в) BB_1C; г) ABC; д) $A_1B_1C_1$; е) CC_1D_1.

62. Точки P, Q и R взяты на поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ следующим образом: точка P лежит в грани CC_1D_1D, точка Q — в грани AA_1D_1D, точка R — на прямой BB_1 (вне отрезка BB_1). Постройте сечение параллелепипеда плоскостью PQR: а) методом внутреннего проектирования; б) комбинированным методом; в) методом следов.

63. На ребрах BC и A_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую CQ параллельно прямой AP: а) комбинированным методом; б) методом следов.

64. На ребрах A_1B_1 и DD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и K, а в гранях DD_1C_1C и AA_1D_1D — соответственно точки Q и R. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку K параллельно плоскости PQR.

65. На поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P, Q и R следующим образом: точка P лежит на диагонали C_1D, точка Q — на диагонали A_1D, а точка R — на прямой AB. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью PQR, если отношения $DP : DC_1$, $DQ : DA_1$ и $AR : AB$ имеют соответственно следующие значения: а) 1 : 2, 1 : 2, 1 : 2; б) 1 : 2, 1 : 3, 1 : 3; в) 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4; г) 1 : 3, 2 : 3, 2 : 3; д) 1 : 3, 1 : 2, 2 : 3; е) 1 : 3, 1 : 2, 2 : 1.

66. Точка P взята на продолжении ребра AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а точки Q и R — соответственно на ребрах C_1B_1 и BC. Постройте линию пересечения плоскости PQR с плоскостью BC_1D, если отношения $AP : A_1P$, $C_1Q : D_1Q$ и $BR : CR$ принимают соответственно значения: а) 1 : 2, 2 : 3, 3 : 2; б) 2 : 3, 1 : 1, 2 : 3; в) 2 : 5, 2 : 1, 1 : 1; г) 2 : 1, 3 : 2, 1 : 3; д) 3 : 2, 1 : 2, 1 : 2; е) 5 : 1, 1 : 3, 1 : 4.

67. На ребрах CC_1 и A_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер, а на ребрах AD, BB_1 и C_1D_1 взяты соответственно точки M, T и R. Постройте линию пересечения плоскостей PQD и MTR, если отношения $AM : DM$, $A_1Q : B_1Q$ и $C_1R : D_1R$ принимают соответственно следующие значения: а) 1 : 2, 1 : 1, 1 : 1; б) 1 : 1, 1 : 1, 2 : 1; в) 1 : 1, 1 : 2, 1 : 1; г) 1 : 3, 1 : 1, 1 : 2; д) 1 : 1, 1 : 3, 2 : 1; е) 2 : 1, 2 : 3, 1 : 1.

68. $PACB$ — изображение правильного тетраэдра, точка K — середина ребра BP. 1) Постройте: а) отрезки KM и KH, перпендикулярные соответственно ребрам PA и PC; $M \in PA$, $H \in PC$; б) точку пересечения плоскости MKH с прямой PO, где O — центроид треугольника ABC. 2) Найдите площадь треугольника MKH.

69. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, BC и CC_1. Найдите длины сторон сечения, если длина ребра куба равна a.

70. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины ребер AB, BC и BB_1 пропорциональны числам 3, 2, 1. Постройте точку пересечения: а) ребра AB с биссектрисой угла BB_1A_1; б) прямой CC_1 с биссектрисой угла BB_1C_1.

Д2 МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ И УГЛУБЛЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИИ

Настоящий раздел задачника посвящен повторению планиметрии в задачах. Заметим, что не ставится цели рассматривать только сложные задачи. Напротив, предлагаются разные задачи: и простые, и средней, и повышенной трудности.

Курс планиметрии полезно системно повторить путем решения задач из таких основополагающих ее разделов, как «Треугольники», «Четырехугольники», «Окружность», «Площади».

Прежде чем приступить к решению задачи, постарайтесь наглядно представить, вообразить, нарисовать фигуры, о которых идет речь.

Алгоритмов решения геометрических задач, как правило, нет. Удачный же выбор в каждом конкретном случае подходящей теоремы достигается путем решения достаточно большого количества задач. Поэтому можно пожелать: ***хотите научиться решать задачи — решайте их!***

Успешность решения геометрической задачи во многом зависит от знания теорем и умения их применять. Безусловно, все теоремы важны. Но из них выделяются «рабочие теоремы», которые наиболее активно используются при решении задач.

Ниже приводятся наиболее полезные, на наш взгляд, «рабочие теоремы».

2.1. «Рабочие теоремы» планиметрии

Теорема 1 (*о замечательных точках и линиях в треугольнике*): а) ***три медианы треугольника пересекаются в одной точке*** (эта точка называется ***центроидом треугольника***) ***и делятся этой точкой в отношении*** $2:1$, ***считая от вершины*** (рис. 117); $AM : MD = 2:1 \Rightarrow AM : AD = 2:3$, $MD : AD = 1:3$;

б) ***три высоты треугольника пересекаются в одной точке*** (эта точка называется ***ортоцентром треугольника***) (рис. 118);

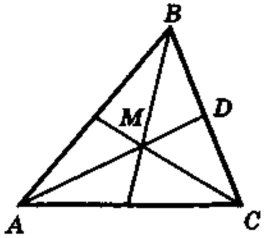


Рис. 117

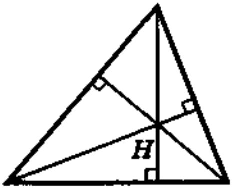


Рис. 118

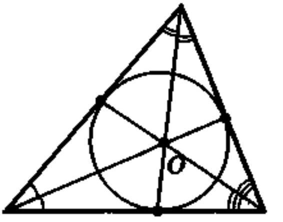


Рис. 119

в) ***три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке*** (эта точка является центром окружности, вписанной в данный треугольник) (рис. 119);

г) ***три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке*** (эта точка является центром окружности, описанной около данного треугольника) (рис. 120);

д) ***ортоцентр H треугольника, его центроид M и центр O описанной окружности лежат на одной прямой*** (она называется ***прямой Эйлера***), ***причем*** $OM : MH = 1 : 2$ (рис. 121).

Не можем удержаться, чтобы не привести здесь формулировку не очень рабочей, но зато очень красивой *т е о р е м ы*:

основания высот треугольника, середины его сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника с его вершинами, лежат на одной окружности (она называется ***окружностью Эйлера*** или ***окружностью девяти точек***) (рис. 122); ***центр этой окружности совпадает с серединой отрезка, соединяющего ортоцентр и центр опи-***

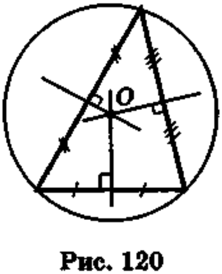


Рис. 120

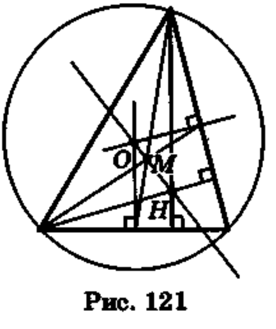


Рис. 121

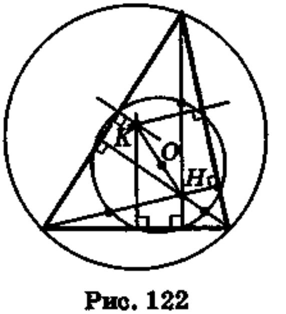


Рис. 122

санной окружности; радиус ее равен половине радиуса описанной окружности.

Теорема 2 (*теорема Менелая; названа по имени древнегреческого ученого Менелая (I в.), доказавшего ее для сферического треугольника*). *Пусть A_1, B_1 и C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях* (рис. 123). *Точки A_1, B_1 и C_1 тогда и только тогда лежат на одной прямой, если:*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Теорема 3 (*теорема Чевы; названа по имени доказавшего ее в 1678 г. итальянского ученого Джованни Чева* (1648—1734)). *Пусть A_1, B_1 и C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях* (рис. 124 *а, б*). *Для того чтобы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекались в одной точке или были все параллельны, необходимо и достаточно, чтобы:*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Теорема 4. *Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам этого треугольника, заключающим данный угол: $BD : DC = AB : AC$* (рис. 125).

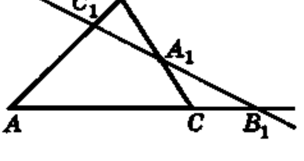


Рис. 123

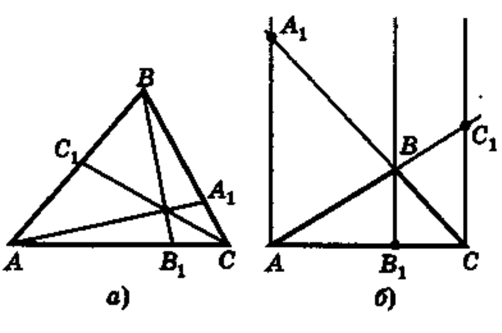


Рис. 124

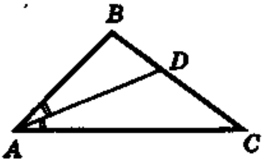


Рис. 125

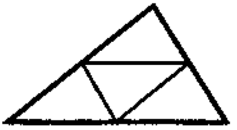


Рис. 126

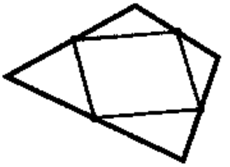


Рис. 127

Теорема 5. ***Средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника*** (рис. 126).

Теорема 6. ***Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма*** (рис. 127).

Теорема 7 (*о средней линии трапеции*):

а) ***средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований;***

б) ***средняя линия трапеции (и только она) делит пополам любой отрезок с концами на основаниях трапеции.***

Теорема 8 (*признак прямоугольного треугольника*).

Если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.

Теорема 9. ***В прямоугольном треугольнике:***

а) ***высота, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, является средней пропорциональной величиной между проекциями катетов на гипотенузу*** (рис. 128):

$$CD^2 = AD \cdot BD;$$

б) ***каждый катет является средней пропорциональной величиной между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу*** (рис. 128):

$$AC^2 = AB \cdot AD; \; BC^2 = AB \cdot BD.$$

Теорема 10. ***Если R и r — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника, катеты которого равны a и b, а гипотенуза — c, то*** $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, $R + r = \dfrac{a+b}{2}$.

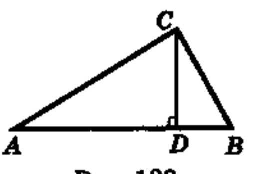


Рис. 128

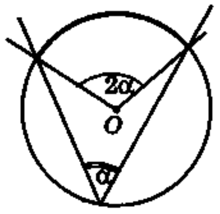


Рис. 129

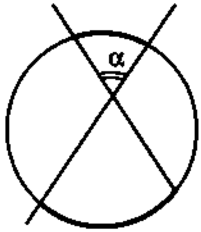


Рис. 130

Теорема 11. ***Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.***

Теорема 12 (*теорема синусов*). ***Во всяком треугольнике** ABC **со сторонами** $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ **выполняется соотношение** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, **где** R **— радиус описанной окружности.***

Теорема 13 (*теорема косинусов*). ***Во всяком треугольнике** ABC **со сторонами** $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ **выполняется соотношение***

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Теорема 14 (*об измерении углов, связанных с окружностью*):

а) ***центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается*** (рис. 129);

б) ***вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается*** (рис. 129);

в) ***угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла*** (рис. 130);

г) ***угол с вершиной вне круга*** (рис. 131) ***измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами*** (предполагается, что каждая из сторон угла пересекается с данной окружностью);

д) ***угол между касательной и хордой*** (рис. 132) ***измеряется половиной дуги, заключенной между ними.***

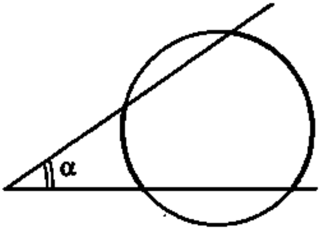


Рис. 131

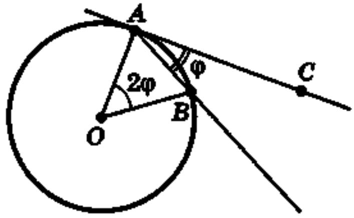


Рис. 132

Теорема 15 (*о свойствах касательных, секущих и хорд окружности*):

а) ***радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной*** (рис. 133);

б) ***если из точки проведены две касательные к окружности, то длины отрезков касательных от этой точки до точек касания равны и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними*** (рис. 134);

в) ***если из точки A проведены к окружности касательная AB и секущая AC, то $AC \cdot AD = AB^2$*** (рис. 135);

г) ***если хорды AB и CD пересекаются в точке M*** (рис. 136), ***то $MA \cdot MB = MC \cdot MD$;***

д) ***если из точки M проведены к окружности две секущие MAB и MCD*** (рис. 137), ***то $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.***

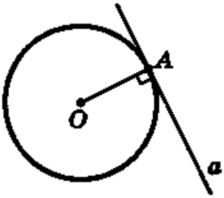


Рис. 133

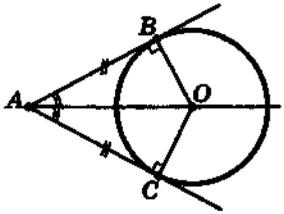


Рис. 134

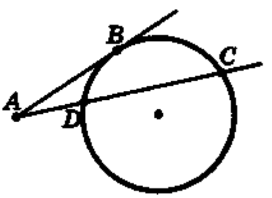


Рис. 135

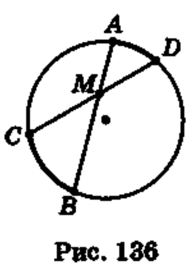


Рис. 136

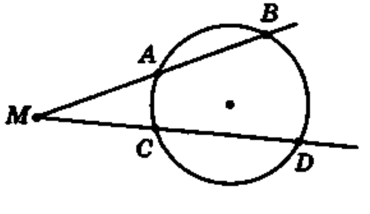


Рис. 137

Теорема 16 (*теорема Птолемея; названа по имени доказавшего ее древнегреческого ученого Птолемея Клавдия* (*II в.*)). ***Во всяком выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин его противоположных сторон, т. е. имеет место равенство*** (рис. 138):

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Теорема 17 (*об окружности и четырехугольнике*):

а) ***около выпуклого четырехугольника можно описать окружность*** (рис. 139) ***тогда и только тогда, когда сумма величин его противоположных углов равна 180°:***

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°;$$

б) ***в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность*** (рис. 140) ***тогда и только тогда, когда равны суммы длин его противоположных сторон: $a + c = b + d$;***

в) ***из всех параллелограммов только около прямоугольника можно описать окружность;***

г) ***около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная;***

д) ***если для четырех точек плоскости A, B, M и K выполняется одно из следующих двух условий:***

- точки M и K расположены по одну сторону от прямой AB и при этом $\angle AMB = \angle AKB$;
- точки M и K расположены по разные стороны от прямой AB и при этом $\angle AMB + \angle AKB = 180°$,

то точки A, B, M и K лежат на одной окружности.

(Эту формулировку мы взяли из замечательного учебника И. Ф. Шарыгина «Геометрия 7—9». М.: Дрофа, 1997.)

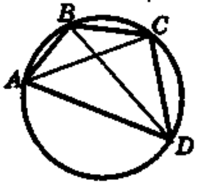


Рис. 138

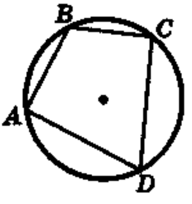


Рис. 139

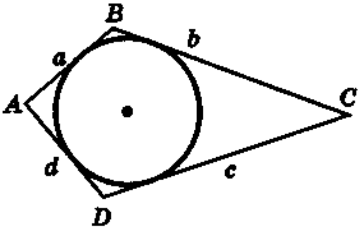


Рис. 140

Теорема 18 (*о площади треугольника*):

а) ***площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту*** (рис. 141):

$$S = \frac{1}{2}ah;$$

б) ***площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними*** (рис. 142):

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C;$$

в) ***площадь треугольника равна половине произведения периметра треугольника на радиус вписанной в него окружности*** (рис. 143):

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c)\cdot r;$$

г) ***площадь треугольника со сторонами a, b, c вычисляется по формуле*** (формула Герона):

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

где $p = \frac{a + b + c}{2}$;

д) ***площадь треугольника со сторонами a, b, c вычисляется по формуле***

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где R — радиус описанного круга;

е) ***отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия этих треугольников;***

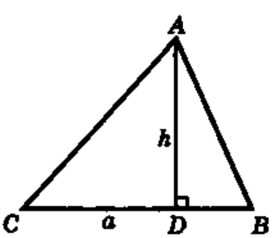


Рис. 141

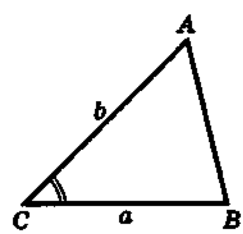


Рис. 142

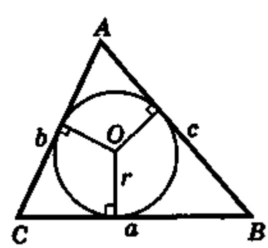


Рис. 143

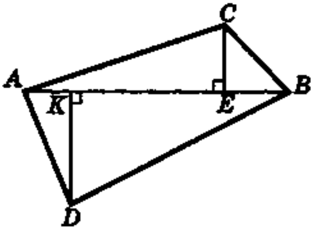


Рис. 144

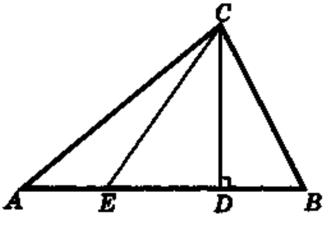


Рис. 145

ж) ***отношение площадей двух треугольников, имеющих общее основание, равно отношению высот этих треугольников*** (рис. 144):

$$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ABD} = CE : DK;$$

з) ***отношение площадей двух треугольников, имеющих равные высоты, равно отношению длин оснований этих треугольников*** (рис. 145):

$$S_{\triangle AEC} : S_{\triangle BEC} = AE : BE;$$

и) ***отношение площадей двух треугольников, имеющих равный угол, равно отношению произведений сторон, содержащих этот угол:***

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \quad (\angle A = \angle A_1).$$

Теорема 19 (*о площади четырехугольника*):

а) ***площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними*** (рис. 146):

$$S = \frac{1}{2}mn \sin \varphi;$$

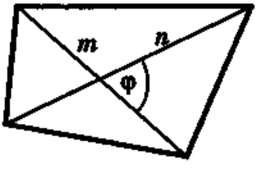


Рис. 146

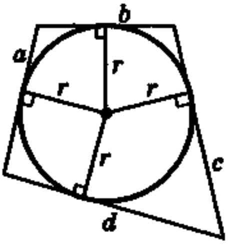


Рис. 147

б) *площадь описанного четырехугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанного круга* (рис. 147):

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c + d) \cdot r;$$

в) *площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту* (произведению средней линии трапеции на высоту);

г) *площадь параллелограмма равна произведению длин двух его сторон на синус угла между ними* (рис. 148):

$$S = ab \sin \varphi;$$

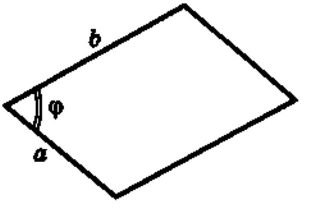


Рис. 148

д) *площадь ромба равна половине произведения длин его диагоналей.*

Теорема 20. *Если точка M — середина отрезка AB, O — произвольная точка* (рис. 149, *а*), *то справедливо векторное равенство*

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Теорема 21. *Если точка M — центроид треугольника ABC, O — произвольная точка* (рис. 149, *б*), *то справедливо векторное равенство*

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

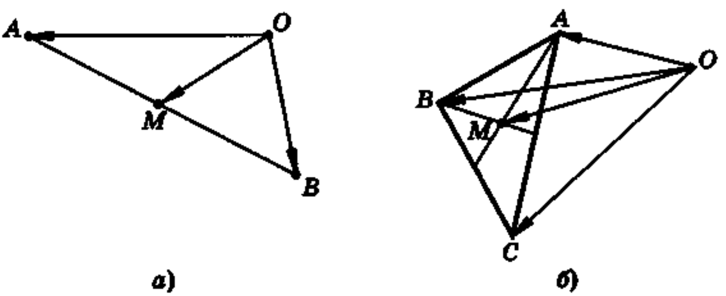


Рис. 149

2.2. Задачи на построение при помощи циркуля и линейки

71. Постройте середину отрезка.

72. Постройте биссектрису угла.

73. Постройте прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой.

74. Постройте прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

75. Постройте треугольник по:

а) стороне и проведенным к ней медиане и высоте;

б) двум сторонам и медиане, проведенной к одной из этих сторон;

в) двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне;

г) двум медианам и стороне (два случая);

д) трем медианам;

е) стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе этого угла;

ж) стороне и двум высотам;

з) трем точкам, являющимся серединами его сторон.

76. Постройте прямоугольный треугольник по:

а) гипотенузе и катету;

б) катету и высоте, опущенной на гипотенузу;

в) высоте и биссектрисе, проведенным из вершины прямого угла;

г) сумме катетов и гипотенузе;

д) катету и сумме гипотенузы с другим катетом.

77. Используя подобие, постройте треугольник по:

а) двум углам и биссектрисе третьего угла;

б) двум углам и радиусу описанной окружности;

в) двум углам и сумме высот.

78. Дан отрезок a. Постройте отрезки, длины которых выражены формулами:

а) $3a$; б) $\frac{2}{7}a$; в) $a \cdot \sqrt{3}$.

79. Даны два отрезка a и b ($a > b$). Постройте отрезки, длины которых выражены формулами:

а) $3a + 5b$; б) $\sqrt{a^2 + 4b^2}$; в) $\sqrt{a^2 + 2b^2}$; г) $\sqrt{a^2 - b^2}$; д) $\sqrt{a \cdot b}$;
е) $\sqrt{a^2 - a \cdot b}$; ж) $\frac{b^2}{a}$; з) $\frac{a^2}{b}$.

80. Постройте прямоугольник с данной диагональю, равновеликий данному квадрату.

81. Постройте трапецию по:
а) четырем сторонам;
б) двум основаниям и двум диагоналям.

82. Постройте центр окружности, описанной около данного треугольника.

83. Постройте центр окружности, вписанной в данный треугольник.

84. Постройте центры вневписанных окружностей для данного треугольника.

85. К данной окружности проведите касательную, проходящую через данную точку (все случаи).

86. К данным двум окружностям проведите все общие касательные.

87. В данный угол впишите окружность данного радиуса.

88. В данный угол впишите окружность, проходящую через данную точку, лежащую внутри угла.

89. Через данную точку, лежащую внутри данного угла, проведите отрезок с концами на сторонах этого угла и серединой в данной точке.

90. Через данную точку проведите прямую, делящую на две равные фигуры:
а) данный круг;
б) данный параллелограмм.

91. Постройте образ точки A при:
а) центральной симметрии относительно данной точки B;
б) осевой симметрии относительно данной прямой b;
в) повороте на угол 45° вокруг данной точки O;

г) параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MP}$, заданный точками M и P;

д) гомотетии с данным центром O и коэффициентом 3;

е) гомотетии с данным центром O и коэффициентом $-0{,}5$.

92. Постройте образ прямой a при:

а) центральной симметрии относительно данной точки B;

б) осевой симметрии относительно данной прямой b;

в) повороте на угол $60°$ вокруг данной точки O;

г) параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MP}$, заданный точками M и P;

д) гомотетии с данным центром O и коэффициентом $\frac{2}{7}$.

93. Постройте образ данной окружности при:

а) центральной симметрии относительно данной точки B;

б) осевой симметрии относительно данной прямой b;

в) повороте на угол $30°$ вокруг данной точки O;

г) параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MP}$, заданный точками M и P;

д) гомотетии с данным центром O и коэффициентом $\frac{3}{2}$.

94. Даны две прямые p и q и не принадлежащая им точка A. Постройте правильный треугольник с вершиной A, чтобы две оставшиеся его вершины принадлежали по одной данным прямым.

Решение.

1. Анализ. Пусть $\triangle ABC$ — искомый (рис. 150), т. е. $\triangle ABC$ — правильный и $B \in p$, $C \in q$.

Треугольник ABC будет построен, если построены его вершины $B \in p$, $C \in q$ (третья вершина треугольника находится в данной точке A). Но так как треугольник ABC равносторонний, то $AB = AC$ и $\angle CAB = 60°$. Это означает, что при повороте $R_A^{60°}$ вокруг точки A на угол $60°$ точка C отображается на точку B ($R_A^{60°}(C) = B$), а при повороте $R_A^{-60°}$ вокруг точки A на угол $-60°$ точка B отображается на точку C ($R_A^{-60°}(B) = C$).

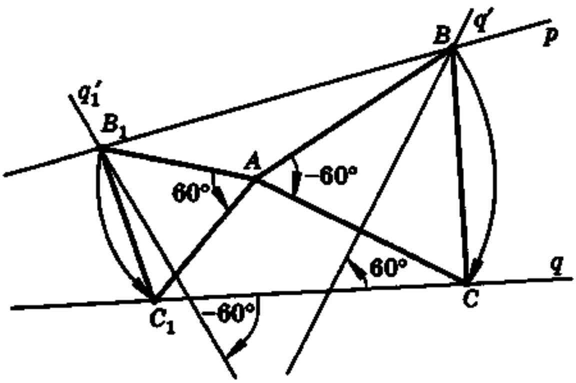


Рис. 150

Поэтому для построения треугольника ABC достаточно построить одну из вершин: B или C.

Итак, треугольник ABC будет построен, если построим, например, точку B.

Так как вершина B треугольника должна принадлежать прямой p, а вершина C — прямой q и $B = R_A^{60°}(C)$, то точка B является точкой пересечения прямых p и $q' = R_A^{60°}(q)$. Поэтому для построения точки B достаточно построить прямую q' — образ прямой q при повороте $R_A^{60°}$.

Схематически рассуждения анализа можно изобразить так:

$\triangle ABC \leftarrow B$ и $C \leftarrow B$ или $C \leftarrow B = p \cap q' \leftarrow q' = R_A^{60°}(q)$.

$$B = R_A^{60°}(C), \qquad \left.\begin{array}{l} B \in p, \\ C \in q, \\ R_A^{60°}(C) = B, \\ R_A^{60°}(q) = q' \end{array}\right\} \Rightarrow B = p \cap q'.$$
$$C = R_A^{-60°}(B)$$

2. Построение. Строим: 1) $q' = R_A^{60°}(q)$; 2) $B = p \cap q'$; 3) $C = R_A^{-60°}(B)$; 4) $\triangle ABC$ — искомый.

3. Доказательство. $B = p \cap q' \Rightarrow B \in q'$, $B \in p$. Докажем, что точка $C = R_A^{-60°}(B)$ принадлежит прямой q.

Поворот $R_A^{60°}$ отображает прямую q на прямую $q' = R_A^{60°}(q)$ взаимно однозначно (биективно). Следовательно, на прямой q

найдется единственная (!) точка, которая отображается на точку $B \in q'$ при повороте $R_A^{60°}$. Этой точкой является точка $C = R_A^{-60°}(B)$. А так как $B \in q'$, то $C \in q = R_A^{60°}(q')$.

4. Исследование. Анализируя каждый шаг построения, замечаем, что внимания заслуживает вопрос о существовании точки B пересечения прямых p и q': $B = p \cap q'$.

С одной стороны, угол между прямой и ее образом при повороте равен углу поворота, т. е. $\widehat{(q, q')} = 60°$. С другой стороны, точка B пересечения прямых p и q' существует, если $q' \nparallel p$ и $q' \neq p$. Это возможно, когда $\widehat{(p, q)} \neq 60°$.

Кроме того, можно построить прямую q_1' — образ прямой q при повороте $R_A^{-60°}$ (рис. 150), которая пересекает прямую p в некоторой точке $B_1 = p \cap q_1'$. Тогда точки A, B_1 и $C_1 = R_A^{60°}(B_1)$ являются вершинами другого треугольника-решения.

Таким образом, если $\widehat{(p, q)} \neq 60°$, то задача имеет два решения.

Если же $\widehat{(p, q)} = 60°$, то:

а) задача имеет одно решение, когда расстояния от точки A до прямых p и q различны;

б) задача имеет одно решение, когда точка A лежит на биссектрисе острого угла между прямыми p и q, и два решения, когда точка A лежит на биссектрисе тупого угла между p и q.

95. Постройте отрезок, равный и параллельный данному отрезку AB, чтобы его концы принадлежали данным прямой и окружности.

96. Даны острый угол и точка M внутри его. Постройте на одной стороне угла такую точку A, что расстояние от точки A до другой стороны угла равно расстоянию AM.

97. Постройте квадрат, чтобы три его вершины по одной принадлежали трем данным прямым.

98. Даны две прямые и окружность. Постройте окружность, касающуюся данных прямых и окружности.

99. Постройте окружность, касающуюся данной окружности в данной точке A и данной прямой (окружность и прямая не пересекаются).

100. Постройте треугольник, если даны его сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

101. В данный треугольник впишите квадрат так, чтобы две его вершины лежали на одной стороне, а две другие — по одной на каждой из остальных сторон.

102. В данную окружность впишите треугольник, подобный данному.

103. В одной полуплоскости относительно прямой c лежат точки A и B на разных расстояниях от c. Постройте на прямой c такую точку M, чтобы:

а) длина ломаной AMB ($AM + MB$) была наименьшей;

б) точка M лежала между проекциями A_1 и B_1 точек A и B на прямую c и угол AMA_1 был равен углу BMB_1;

в) точка M лежала между проекциями A_1 и B_1 точек A и B на прямую c и угол AMA_1 был вдвое больше угла BMB_1.

104. Внутри данного острого угла дана произвольная точка M. Постройте на сторонах этого угла такие точки A и B, чтобы периметр треугольника MAB был наименьшим.

105. На числовой прямой отмечены точки A и B, координаты которых соответственно равны 1 и $\sqrt{2}$. Постройте на этой прямой точку с координатой 0.

2.3. Тематическая подборка задач на вычисление и доказательство

Треугольник

106. Две стороны треугольника равны соответственно 6 и 8. Медианы, проведенные к этим сторонам, пересекаются под прямым углом. Найдите третью сторону треугольника.

Решение. Пусть $AC = 6$, $BC = 8$ и медианы AE и BD пересекаются под прямым углом в точке M (рис. 151). Найдем длину стороны AB.

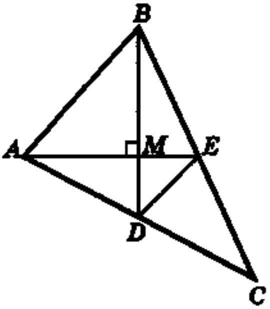


Рис. 151

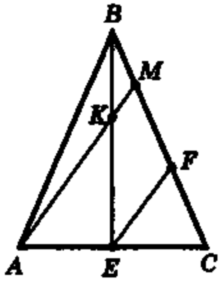


Рис. 152

Так как M — точка пересечения медиан AE и BD треугольника ABC, то $BM : MD = AM : ME = 2 : 1$. Поэтому, если $ME = a$, $MD = b$, то $AM = 2a$, $BM = 2b$.

По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках AMD и BME имеем: $AM^2 + DM^2 = AD^2$, $EM^2 + BM^2 = BE^2$.

Учитывая, что $AD = \frac{1}{2}AC = 3$, $BE = \frac{1}{2}BC = 4$, получаем

$$\begin{cases} 4a^2 + b^2 = 9, \\ a^2 + 4b^2 = 16. \end{cases}$$

Сложив эти равенства, находим $a^2 + b^2 = 5 = DE^2$, откуда $DE = \sqrt{5}$. Так как DE — средняя линия треугольника ABC, то $AB = 2DE = 2\sqrt{5}$.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

107. Расстояния от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до его сторон AC и BC соответственно равны 2 см и 4 см. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $AB = 10$ см, $BC = 17$ см, $AC = 21$ см.

108. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = 1 : 4$. В каком отношении прямая AM делит медиану BE треугольника ABC, считая от вершины B?

Решение. Проведем $EF \parallel AM$ (рис. 152), $F \in MC$. Тогда EF — средняя линия треугольника $AMC \Rightarrow F$ — середина MC. Поэтому $BM : MC = 1 : 4$, $MF : MC = 1 : 2$, откуда $BM : MF = 1 : 2$, значит, $BM : BF = 1 : 3$. По теореме Фалеса $BK : BE = BM : BF = 1 : 3$, следовательно, $BK : KE = 1 : 2$.

Ответ: $1 : 2$.

109. Найдите третью сторону остроугольного треугольника, если две его стороны равны a и b и известно, что медианы этих сторон пересекаются под прямым углом.

110. В остроугольном треугольнике ABC сторона $AB = 8$, $BC = 6$. Высоты AL и CK пересекаются в точке P. Через точки A и P проведены прямые, перпендикулярные прямой KL и пересекающие прямую BC соответственно в точках H и T. Найдите длину отрезка TH.

111. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и AE, пересекающиеся в точке O. При этом $AB = BM$, $BO = 2 \cdot OM$ и периметр треугольника ABM равен 14. Найдите AB.

112. Найдите отношение суммы квадратов длин сторон треугольника к сумме квадратов длин его медиан.

Прямоугольный треугольник

113. Медианы, проведенные из вершин острых углов прямоугольного треугольника, равны 2 и 3. Найдите площадь этого треугольника.

114. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медиана CM и высота CH. Площадь треугольника ABC равна 10 см^2, а треугольника CHM — 3 см^2. Найдите длину гипотенузы.

115. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12. Найдите расстояние между точкой пересечения биссектрис и точкой пересечения медиан этого треугольника.

116. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а острый угол равен β. Найдите длину биссектрисы прямого угла треугольника.

Теорема Менелая

117. В треугольнике ABC отрезки AD и BM, проведенные из вершин A и B соответственно к сторонам BC и AC, пересекаясь в точке P, делятся в отношении $AP : PD = 3 : 2$ и $BP : PM =$

$= 4 : 5$. В каком отношении точки D и M делят стороны треугольника, считая от C?

118. В треугольнике ABC точка D делит сторону BC в отношении $BD : DC = 3 : 4$. Точка M делит сторону AC в отношении $AM : MC = 2 : 5$. Отрезки AD и BM пересекаются в точке K. Найдите площадь треугольника AKM, если площадь треугольника BKD равна 45.

119. В треугольнике ABC точка K делит сторону AB в отношении $AK : KB = 1 : 2$, а точка P делит сторону BC в отношении $CP : PB = 2 : 1$. Прямые AP и CK пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BMC равна 4.

120. Прямая KP делит сторону AB треугольника ABC в отношении $AK : KB = 2 : 1$, а сторону BC — в отношении $BP : PC = 3 : 1$. Медиана BB_1 пересекает прямую KP в точке M. При этом площадь четырехугольника B_1MPC равна 17. Найдите площадь треугольника ABC.

121. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и T, так что $AP < AT$. Прямые BP и BT делят медиану AM на три равные части. Найдите AC, если $PT = 3$.

122. В треугольнике ABC площади 18 проведены отрезки BM и AK, причем точки M и K делят соответственно стороны AC и BC в отношении $AM : MC = 3 : 4$ и $BK : KC = 2 : 7$. Найдите площадь четырехугольника $CMPK$, где P — точка пересечения отрезков BM и AK.

123. На сторонах треугольника ABC взяты точки M, K и P такие, что $AM : MB = BK : KC = CP : PA = 2 : 1$. Отрезки CM и BP пересекаются в точке A_1, AK и CM — в точке B_1, AK и BP — в точке C_1. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 1.

Треугольник и окружность

124. В треугольнике ABC известны стороны: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Найдите отрезки сторон, на которые они делятся точками касания с вписанной окружностью.

125. Докажите, что в треугольнике со сторонами a, b и c высота h_a к стороне a вычисляется по формуле $h_a = \frac{bc}{2R}$, где R — радиус описанной окружности.

126. В окружность радиуса 32,5 см вписан треугольник, две стороны которого равны 25 см и 39 см. Найдите третью сторону треугольника.

127. В треугольнике ABC площади S вписана окружность радиуса r, которая касается сторон AC и BC соответственно в точках D и E таких, что $AD : DC = 2 : 3$ и $BE : EC = 5 : 6$. Найдите длину стороны AC.

128. На основании AC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке D, а BC — в точке E. Определите сторону AB, если $AD = 30$ см, а хорда DE равна 14 см.

129. Пусть основание равнобедренного треугольника равно a, боковая сторона равна b, высота, опущенная на основание, равна h. Выразите радиус описанной около этого треугольника окружности через любые две из трех величин: a, b и h.

130. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 15, вписана окружность радиуса 1. Найдите стороны этого треугольника.

131. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D, при этом $AD = a$, $DC = b$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются прямой BD в точках E и H, а прямой AC — соответственно в точках K и M. Найдите длину отрезка EH.

132. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) с основанием $AC = 6$ и боковой стороной $AB = 5$ описана окружность. Найдите радиус окружности и расстояния от вершин A и B до касательной, проведенной через точку C.

133. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность, которая касается сторон AC и BC соответственно в точках D и E; проведены отрезки DF и EK, параллельные стороне AB ($F \in BC$, $K \in AC$). Найдите длину стороны BC, если $EF = a$, $KD = b$.

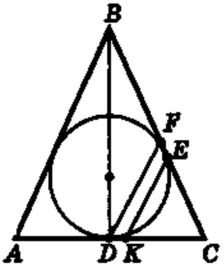


Рис. 153

Решение. Пусть $CD = x$. Тогда $CK = CD - KD = x - b$, $CE = CD = x$ (как отрезки касательных), $CF = CE + EF = x + a$ (рис. 153). Из подобия треугольников CKE и CDF следует $CK : CD = CE : CF$ или $(x - b) : x = x : (x + a)$, откуда находим: $x = \dfrac{ab}{a-b}$. Тогда $CF = \dfrac{ab}{a-b} + a = \dfrac{a^2}{a-b}$. А так как $DF \parallel AB$ и точка D — середина AC, то DF — средняя линия треугольника ABC. Значит, F — середина BC и $BC = 2CF = \dfrac{2a^2}{a-b}$.

Ответ: $\dfrac{2a^2}{a-b}$.

134. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся боковых сторон треугольника в точках K и E. Найдите периметр треугольника ABC, если хорда KE равна 12 см, а отрезок касательной, заключенный между боковыми сторонами и параллельный основанию, равен 10 см.

135. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность и к окружности проведена касательная, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC соответственно в точках D и E. Найдите длину отрезка DE и радиус окружности, описанной около четырехугольника $ADEC$, если $AD = 15$ см, $BD = 30$ см.

136. Докажите, что в непрямоугольном треугольнике ABC расстояние от ортоцентра до вершины B вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до стороны AC.

137. AD и CE — высоты остроугольного треугольника ABC, периметр которого равен 15 см. Периметр треугольника BDE равен 9 см, а радиус окружности, описанной около него, равен 1,8 см. Найдите длину AC.

138. Из вершины B треугольника ABC проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника, пересекающие сторону AC и ее продолжение в точках D и E соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BDE, если известно, что $AC = a$ и $AB : BC = 2 : 3$.

139. Боковая сторона и основание равнобедренного треугольника равны соответственно 50 см и 60 см. Найдите расстояние между точкой пересечения высот треугольника и центром вписанной в него окружности.

140. BD и AE — высоты равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и AEC, равны соответственно 5 см и 6 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

141. Катеты прямоугольного треугольника равны 20 см и 50 см. Найдите радиус окружности, которая касается меньшего катета и проходит через середины двух других сторон.

142. Окружность радиуса R проходит через вершину A равнобедренного треугольника ABC, касается основания BC в точке B и пересекает AC в точке K. Найдите длину боковой стороны, если $KC = 3AK$.

143. Сторона треугольника равна 48 см, а высота, проведенная к этой стороне, равна 8,5 см. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник, до вершины, противолежащей данной стороне, если радиус вписанной окружности равен 4 см.

144. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CK. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACK и BCK, равны соответственно r_1 и r_2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

145. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CK. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACK и BCK, равны соответственно r, r_1 и r_2. Найдите длину высоты CK.

146. В треугольнике ABC сторона $AB = 2$, $BC = 3$, $CA = 4$. Окружность проходит через вершины A и C, середину стороны AB и пересекает сторону BC. Найдите радиус этой окружности.

147. В треугольник со сторонами 3; 5 и 6 вписана окружность. Найдите отношение площади данного треугольника к площади треугольника с вершинами в точках касания.

148. В треугольник с углами 42° и 84° вписана окружность. Найдите углы треугольника с вершинами в точках касания.

149. В треугольник вписана окружность. Найдите углы этого треугольника, если углы треугольника с вершинами в точках касания 68° и 50°.

150. В остроугольном треугольнике ABC ($AB > BC$) проведены высоты AT и CM; BN — диаметр окружности, описанной около треугольника ABC. Известно, что величина острого угла между высотами AT и CM равна 45°, $AC = 4$. Найдите площадь четырехугольника $NMBT$.

151. В треугольнике ABC угол BAC равен 75°, $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$. На стороне BC выбрана точка M так, что угол BAM равен 30°. Прямая AM пересекает окружность, описанную около треугольника, в точке N. Найдите длину AN.

152. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке D. Найдите длину отрезка BC, если длина каждой из хорд AC и DC равна 1.

153. Через точку D основания AB равнобедренного треугольника ABC проведена прямая CD, пересекающая описанную около этого треугольника окружность в точке E. Найдите длину отрезка AC, если $CE = 6$ и $DE = DC$.

154. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$, $BC = 16$. Центр окружности, проведенной через вершину B и середины сторон AB и AC, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.

155. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Найдите величину тупого угла, образованного при пересечении BB_1 с биссектрисой A_1P треугольника $A_1B_1C_1$, если величина угла ACB равна 23°.

156. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник $A_1B_1C_1$, если расстояние от точки K до прямой A_1C_1 равно 5.

Площадь треугольника

157. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 13$ см, $AC = 15$ см и длина медианы AM равна 7 см.

158. В треугольнике ABC отношения сторон $AB : BC : CA = 5 : 7 : 9$; BP и CM — биссектрисы, K — середина BC. Найдите отношение площадей треугольников ABC и PMK.

159. Площадь прямоугольного треугольника равна 60 дм^2, а периметр равен 40 дм. Найдите катеты треугольника.

160. Точки K и M расположены соответственно на стороне BC и высоте BH остроугольного треугольника ABC так, что треугольник AKM является равносторонним. Найдите площадь треугольника AKM, если известно, что $AH = 3$, $HC = \frac{11}{2}$, $CK : KB = 1 : 10$.

161. В треугольнике ABC отношения сторон $AB : BC : CA = 2 : 3 : 4$; AK и BP — биссектрисы; M — середина AB. Найдите отношение площадей треугольников ABC и KMP.

162. Найдите углы треугольника, если известно, что площадь S этого треугольника выражается через длины a и b его сторон формулой $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

163. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B — прямой) взята точка D так, что площади треугольников ABD и BDC соответственно в 3 и 4 раза меньше площади треугольника ABC. Найдите длину отрезка BD, если $AD = a$, $DC = c$.

164. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты соответственно точки K и P так, что $AK : KB = 1 : 2$, $CP : PB = 2 : 1$. Прямые AP и CK пересекаются в точке E. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BEC равна 4.

165. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC лежит точка N. На прямой AB выбрана точка P так, что B лежит между N и P, а угол NCP — прямой. Найдите площадь треугольника NBC, если площади треугольников ABC и NCP равны соответственно a и b, а угол ACP равен $150°$.

166. В треугольнике ABC сторона $AC = 5$, $AB + BC = 7$, угол BAC равен $\arccos 0{,}8$. Найдите площадь треугольника ABC.

167. Найдите площадь треугольника, если его медианы равны 5; 4 и $\sqrt{17}$.

168. На сторонах AB и BC треугольника ABC с острым углом при вершине B взяты точки P и M, причем P — середина стороны AB. Известно, что $AB = 4$, $BC = 5$, $BM = 3$. Найдите длину отрезка PM, если площадь треугольника ABC на $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ больше площади треугольника PBM.

Подобие треугольников

169. В треугольник ABC вписан параллелограмм $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E лежит на стороне BC. Площадь параллелограмма равна 36 см^2, а треугольника BDE — 24 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

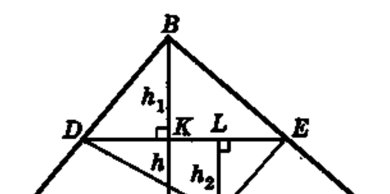


Рис. 154

Решение. Обозначим площади треугольников ABC, DBE, DFE соответственно S, S_1, S_2, а их высоты — $BH = h$, $BK = h_1$, $FL = h_2$ (рис. 154).

Из подобия треугольников ABC и DBE ($DE \parallel AC$) следует, что отношение площадей этих треугольников равно квадрату отношения их высот: $\frac{S}{S_1} = \left(\frac{h}{h_1}\right)^2$. Найдем отношение $\frac{h}{h_1}$.

Треугольники DBE и DFE имеют общее основание DE, поэтому отношение $S_1 : S_2$ площадей этих треугольников равно отношению $h_1 : h_2$ их высот: $S_1 : S_2 = h_1 : h_2$.

Учитывая, что $S_1 = 24$, $S_2 = S_{\Delta DFE} = \frac{1}{2} S_{ADEF} = 18$, получаем $24 : 18 = h_1 : h_2$, значит, $h_2 = \frac{3}{4} h_1$. Поэтому $h = BH = BK + KH = h_1 + h_2 = h_1 + \frac{3}{4} h_1 = \frac{7}{4} h_1$. Следовательно, $\frac{h}{h_1} = \frac{7}{4}$. Тогда

$$S : S_1 = 49 : 16, \text{ откуда } S = \frac{49}{16} S_1 = \frac{49}{16} \cdot 24 = 73{,}5 \text{ (см}^2).$$

Ответ: 73,5 см^2.

170. Пусть AA_1, BB_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC. Чему равен коэффициент подобия?

171. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и BK. Найдите площадь треугольника CMK, если площадь треугольника ABC равна S, а величина угла ACB — β.

172. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка T и через нее проведены прямые TM и TP, параллельные соответственно прямым AC и AB ($M \in AB$; $P \in AC$). Площадь треугольника BMT равна S_1, а площадь треугольника TPC — S_2. Найдите: а) площадь треугольника ABC; б) площадь параллелограмма $AMTP$.

173. Внутри треугольника ABC взята точка M, через которую проведены прямые, параллельные всем его сторонам. Площади трех образовавшихся треугольников с общей вершиной M равны S_1, S_2 и S_3. Найдите площадь треугольника ABC.

Параллелограмм

174. Найдите стороны параллелограмма, диагонали которого равны 50 см и 78 см, а площадь — 1680 см^2.

175. Из вершины тупого угла параллелограмма опущены высоты на его стороны, расстояние между основаниями которых равно 52 см. Найдите стороны параллелограмма, если его высоты равны 56 см и 60 см.

176. В параллелограмме со сторонами a и b ($a > b$) проведены биссектрисы внутренних углов. Найдите длины диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки пересечения биссектрис.

177. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH. Известны длины отрезков: $KH = a$, $BD = b$. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот треугольника BKH.

Ромб, прямоугольник, квадрат

178. $ABCD$ — прямоугольник, в котором $AB = 1$, $BC = 2$. На сторонах BC и AD взяты точки M и P так, что четырехугольник $MBPD$ — ромб. Найдите сторону ромба.

179. Стороны прямоугольника $ABCD$ равны соответственно $AB = 11$ см, $BC = 7$ см. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D — в точке K. Найдите MK.

180. Высота BK ромба $ABCD$, опущенная на сторону AD, пересекает диагональ AC в точке M. Найдите длину MC, если известно, что $BK = 4$; $AK : KD = 1 : 2$.

181. Окружность, центр которой лежит вне квадрата $ABCD$, проходит через точки B и C. Найдите угол между касательными к окружности, проведенными из точки D, если отношение длины стороны квадрата к диаметру окружности равно 0,6.

182. Точки M, K, P, Q — середины сторон соответственно AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$. Найдите площадь фигуры, являющейся пересечением четырехугольников $AKCQ$ и $BPDM$, если площадь ромба равна 100 см^2.

183. Около круга радиуса R описаны квадрат и равносторонний треугольник, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Найдите площадь общей части треугольника и квадрата.

184. В ромбе $ABCD$ со стороной 6 и углом BAD, равным 60°, на стороне BC взята точка E так, что $CE = 2$. Найдите расстояние от точки E до точки пересечения диагоналей ромба.

Трапеция

185. В равнобедренной трапеции бо́льшее основание равно a, боковая сторона равна 4, угол при основании $60°$. Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

186. Через вершины B и C тупых углов равнобедренной трапеции $ABCD$ проведены отрезки $CE \parallel AB$ и $BF \parallel CD$ ($E \in BD$, $F \in AC$). Периметры $ABCD$ и $BCEF$ равны соответственно 60 см и 40 см. Найдите длину стороны AB, если $EF = 8$ см.

187. Диагонали трапеции перпендикулярны и равны 12 и 9. Найдите высоту трапеции и отрезок, соединяющий середины оснований.

188. Площадь равнобедренной трапеции равна 100, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите высоту этой трапеции.

189. В прямоугольную трапецию с основаниями a и b вписана окружность. Найдите площадь этой трапеции.

190. В равнобедренной трапеции $ABCD$ угол A равен $60°$. Прямоугольник $MCNK$ расположен так, что точка M лежит на стороне AB, точка N — на стороне CD, точка K — на стороне AD, при этом $AK = BC = 1$. Найдите стороны прямоугольника $MCNK$.

191. Дана равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна 9 дм, площадь равна 54 дм^2 и диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите основания трапеции.

192. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис — 15 см и 13 см.

193. В окружность вписана трапеция, боковая сторона которой равна 15 см, средняя линия 16 см и большее основание является диаметром окружности. Найдите площадь трапеции.

194. Основания равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равны 1 и 3. Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

195. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на расстояния 3 см и 9 см. Найдите стороны трапеции.

196. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции с высотой h, если боковая сторона трапеции «видна» из центра описанной около нее окружности под углом 120°.

197. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2CD = 3RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника APQ, если $AD = 2BC$.

Решение. Рассмотрим несколько способов решения этой задачи.

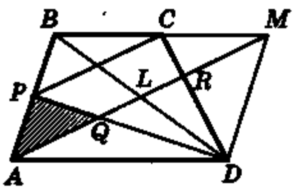


Рис. 155

Первый способ (*геометрический метод*). Достроим трапецию $ABCD$ до параллелограмма $ABMD$ (рис. 155). Тогда $BM = AD = 2BC \Rightarrow C$ — середина BM. Значит, $CP \parallel AM$ (почему?).

Пусть $L = AM \cap BD$ (в параллелограмме $ABMD$). Из этого следует, что L — середина BD. Тогда DC и ML — медианы треугольника BMD; точка пересечения этих медиан делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Но отрезок CD в отношении $2 : 1$ делит точка R ($2CD = 3RD \Rightarrow$ $\Rightarrow DR : CD = 2 : 3 \Rightarrow DR : RC = 2 : 1$). Это означает, что точка R принадлежит диагонали AM параллелограмма $ABMD$ (почему?), т. е. точки L и M лежат на прямой AR. Но точка $Q = AR \cap PD$ также лежит на прямой AR, т. е. точки Q, L, R лежат на диагонали AM.

Далее, $CR : CD = 1 : 3$, $CP \parallel AM \Rightarrow CR : CD = PQ : PD = 1 : 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow S_{\triangle APD} = 3S_{\triangle APQ}$.

Кроме того, треугольники ABD и BCD имеют общую высоту (равную высоте трапеции) и $AD = 2BC$, поэтому $S_{\triangle ABD} =$ $= 2S_{\triangle BCD}$. А так как $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = 30$, то $3S_{\triangle BCD} = 30$, откуда $S_{\triangle BCD} = 10$, $S_{\triangle ABD} = 20$.

Поскольку точка P — середина AB, то $S_{\triangle APD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} =$ $= 10$. Учитывая, что $S_{\triangle APD} = 3S_{\triangle APQ}$, получаем $S_{\triangle APQ} =$ $= \frac{10}{3}$ (кв. ед.).

Ответ: $\frac{10}{3}$ кв. ед.

Второй способ (*геометрический метод*). Пусть PN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 156). Тогда из условия $AD = 2BC$ получаем

$$BC : PN = 2 : 3. \qquad (1)$$

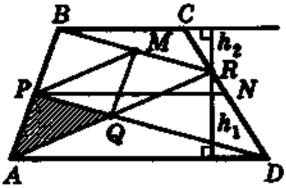


Рис. 156

Учитывая, что N — середина стороны CD, и принимая во внимание условие $2CD = 3RD$, получаем

$$CR : ND = 2 : 3. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\triangle BCR \backsim \triangle PND$ ($\angle C = \angle PND$, так как $BC \parallel PN$). Отсюда $BR \parallel PD$ и PQ — средняя линия (почему?) треугольника ABR. Значит, Q — середина отрезка AR. Если M — середина BR, то отрезки PQ, QM и MP — средние линии треугольника ABR. Это означает, что $S_{\triangle AQP} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABR}$.

Найдем $S_{\triangle ABR}$.

Из рисунка 156 видно, что $S_{\triangle ABR} = S_{ABCD} - S_{\triangle BCR} - S_{\triangle ADR}$.

Так как $CR : CD = 1 : 3$, $RD : CD = 2 : 3$, то высоты h_1 и h_2 треугольников ADR и BCR соответственно равны: $h_1 = \frac{2}{3}h$, $h_2 = \frac{1}{3}h$, где h — высота данной трапеции. Тогда

$$S_{\triangle ADR} = \frac{1}{2}AD \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}AD \cdot h = \frac{1}{3}AD \cdot h = \frac{2}{3}BC \cdot h,$$

$$S_{\triangle BCR} = \frac{1}{2}BC \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}BC \cdot h = \frac{1}{6}BC \cdot h,$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + 2BC}{2} \cdot h = \frac{3}{2}BC \cdot h.$$

Таким образом, $S_{\triangle ABR} = \frac{3}{2}BC \cdot h - \frac{2}{3}BC \cdot h - \frac{1}{6}BC \cdot h = \frac{2}{3}BC \cdot h$. Поэтому $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABR} = \frac{1}{6}BC \cdot h$. Следовательно, $S_{ABCD} : S_{\triangle APQ} = \left(\frac{3}{2}BC \cdot h\right) : \left(\frac{1}{6}BC \cdot h\right) = 9$, то есть $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{9}S_{ABCD} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$ (кв. ед.).

Ответ: $\frac{10}{3}$ кв. ед.

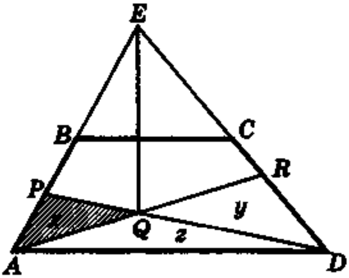


Рис. 157

Третий способ (комбинированный метод). Пусть $E = AB \cap CD$ (рис. 157). Имеем $BC = \frac{1}{2}AD$, $BC \parallel AD \Rightarrow BC$ — средняя линия $\triangle ADE \Rightarrow S_{\triangle ADE} = 4S_{\triangle BEC}$ (почему?).

Если $S_{\triangle BCE} = a$, то, учитывая, что $S_{\triangle ADE} = S_{ABCD} + S_{\triangle BEC}$, получаем $4a = a + 30$, откуда $a = 10$. Таким образом, $S_{\triangle BEC} = 10$, значит, $S_{\triangle ADE} = 40$.

Обозначим: $S_{\triangle APQ} = x$, $S_{\triangle DQR} = y$, $S_{\triangle ADQ} = z$. Тогда $AE = 2AB = 2 \cdot 2AP = 4AP \Rightarrow PE = 3AP \Rightarrow S_{\triangle QPE} = 3S_{\triangle QAP}$, т. е.

$$S_{\triangle QPE} = 3x; \qquad (1)$$

$$ED = 2CD = 2 \cdot \frac{3}{2}RD = 3DR \Rightarrow ER = 2RD \Rightarrow S_{\triangle QER} = 2S_{\triangle QRD},$$

т. е.

$$S_{\triangle QER} = 2y. \qquad (2)$$

Кроме того,

$$EP = 3AP \Rightarrow S_{\triangle DEP} = 3S_{\triangle DAP}; \qquad (3)$$

$$ER = 2DR \Rightarrow S_{\triangle AER} = 2S_{\triangle ADR}; \qquad (4)$$

$$S_{\triangle ADE} = S_{\triangle AQE} + S_{\triangle DQE} + S_{\triangle ADQ} = 40. \qquad (5)$$

Из рисунка 157 и соотношений (3)—(5) с учетом (1), (2) получаем

$$\begin{cases} 3x + 3y = 3(x + z), \\ 4x + 2y = 2(y + z), \\ 4x + 3y + z = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z, \\ z = 2x, \\ 4x + 6x + 2x = 40, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{10}{3}$.

Итак, $S_{\triangle APQ} = \frac{10}{3}$ (кв. ед.).

Ответ: $\frac{10}{3}$ кв. ед.

Анализ приведенных способов решения этой задачи свидетельствует о многообразии путей к творческому поиску решения той или иной задачи. Вот еще подтверждение вы-

сказанного ранее: хотите научиться решать задачи — решайте их!

198. Около окружности описана прямоугольная трапеция, боковые стороны которой равны 20 см и 25 см. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами трапеции.

199. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение длины описанной окружности к длине вписанной окружности равно $2\sqrt{5}$. Найдите углы трапеции.

200. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Площадь описанного круга в 12 раз больше площади вписанного круга. Найдите углы трапеции.

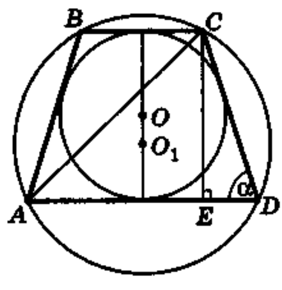


Рис. 158

Решение. Обозначим: $AD = a$, $BC = b$, $AB = CD = c$, $CE = h$ (высота трапеции) (рис. 158); R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности. Тогда

$$\left.\begin{aligned} S_{\text{опис. кр.}} &= \pi R^2, \\ S_{\text{впис. кр.}} &= \pi r^2, \\ S_{\text{опис. кр.}} &= 12 S_{\text{впис. кр.}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi R^2 = 12\pi r^2 \Rightarrow R = 2r\sqrt{3}. \qquad (1)$$

Далее выразим дважды длину диагонали AC через r и α, где $\alpha = \angle ADC$.

Имеем, с одной стороны, в $\triangle ACD$ $\dfrac{AC}{\sin\alpha} = 2R$. Учитывая (1), получаем

$$AC = 2R\sin\alpha = 4r\sqrt{3}\sin\alpha. \qquad (*)$$

С другой стороны, в $\triangle ACE$ ($\angle AEC = 90°$) по теореме Пифагора:

$$AC^2 = AE^2 + EC^2. \qquad (**)$$

Выразим AE и EC через r и α.

Трапеция $ABCD$ описана около окружности радиуса r, поэтому высота $EC = 2r$ и $a + b = 2c$, откуда $c = \frac{a+b}{2}$. Кроме того, трапеция $ABCD$ — равнобедренная, значит, $AE = \frac{BC + AD}{2} = \frac{a+b}{2}$. Таким образом, $AE = c$.

В прямоугольном треугольнике DEC находим: $c = CD = \frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha}$. Следовательно, $AE = c = \frac{2r}{\sin\alpha}$. Подставив в (**) вместо AE и EC их найденные значения, получаем

$$AE = \frac{2r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}. \qquad (***)$$

Из (*) и (***) имеем $4r\sqrt{3}\sin\alpha = \frac{2r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$ или

$$\begin{cases} 12\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0, \\ \sin\alpha \neq 0. \end{cases}$$

Сделав подстановку $\sin^2\alpha = t$ $(t > 0)$, приходим к уравнению $12t^2 - t - 1 = 0$, корнями которого являются $t_1 = -\frac{1}{4}$ (не удовлетворяет условию $t > 0$) и $t_2 = \frac{1}{3}$. Тогда $\sin^2\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (не удовлетворяет условию, т. к. } \alpha < 90^\circ\text{)}, \\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$$

Итак, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $\angle A = \angle D = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, следовательно, $\angle B = \angle C = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Попытаемся решить эту задачу другим способом, для чего выразим дважды площадь трапеции через r и α.

Имеем, $S_{\text{трап.}} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CE = \dfrac{a+b}{2} \cdot h.$

С одной стороны, в трапеции $ABCD$, описанной около окружности радиуса r, имеют место соотношения $\dfrac{a+b}{2} = c$, $h = 2r$, а в прямоугольном $\triangle ECD$ сторона $c = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Поэтому

$$S_{\text{трап.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = c \cdot h = \frac{h^2}{\sin\alpha} = \frac{4r^2}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

С другой стороны, $\dfrac{a+b}{2} = AE$ (трапеция $ABCD$ — равнобедренная). Найдем AE:

$\triangle ACE$ ($\angle E = 90°$): по теореме Пифагора $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2}$.

$\triangle ACD$: $AC = 2R\sin\alpha$. Учитывая, что $R = 2r\sqrt{3}$, получаем $AE = \sqrt{4R^2\sin^2\alpha - (2r)^2} = 2r\sqrt{12\sin^2\alpha - 1}$. Тогда

$$S_{\text{трап.}} = AE \cdot CE = 2r\sqrt{12\sin^2\alpha - 1} \cdot 2r = 4r\sqrt{12\sin^2\alpha - 1}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получаем $4r\sqrt{12\sin^2\alpha - 1} = \dfrac{4r^2}{\sin\alpha}$ или

$$12\sin^2\alpha - 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0, \\ \sin\alpha \neq 0. \end{cases}$$

Решением этого уравнения (см. выше) является $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\alpha = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $\angle A = \angle D = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle B = \angle C = \pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

201. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Найдите углы трапеции.

202. Длина одного из оснований трапеции равна 7, а длина отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на две равновеликие части, равна 5. Найдите длину второго основания трапеции.

203. Длина одного из оснований трапеции равна 5, а длина отрезка, параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции, равна 3,75. Найдите длину второго основания трапеции.

204. Длина одного из оснований трапеции равна 8, а длина отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на две подобные друг другу трапеции, равна 4. Найдите длину второго основания трапеции.

205. Произведение длин оснований прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равно 37. Найдите площадь этой трапеции.

206. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали пересекаются в точке M; $BC = b$, $AD = a$. Найдите отношение площадей треугольника ABM и трапеции.

207. Основания трапеции равны 7 и 21, а боковые стороны равны 13 и 15. Найдите площадь трапеции.

Четырехугольники

208. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 3. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

209. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины диагоналей равны 2 и 3. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

210. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 4 см^2. Его стороны продолжены: AB за точку B так, что $AB = 2BK$; BC за точку C так, что $BC = 2CL$; CD за точку D так, что $CD = 2DM$; DA за точку A так, что $DA = 2AP$. Найдите площадь четырехугольника $KLMP$.

211. Диагонали BD и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O, $OA = \frac{4}{3}$, $OC = 3$. Точка M лежит на стороне AB, причем $AM : MB = 1 : 3$. Треугольник DMC — равносторонний. Найдите его площадь.

212. Площадь треугольника ABC равна P. Прямая DE, параллельная основанию AC, отсекает от треугольника ABC треугольник BDE, площадь которого равна Q. На стороне AC взята произвольная точка M и соединена отрезками прямых с точками D и E. Чему равна площадь четырехугольника $BDME$?

213. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная диагонали AC. Эта прямая пересекает сторону AD в точке E. Докажите, что прямая CE разбивает четырехугольник $ABCD$ на две равновеликие части.

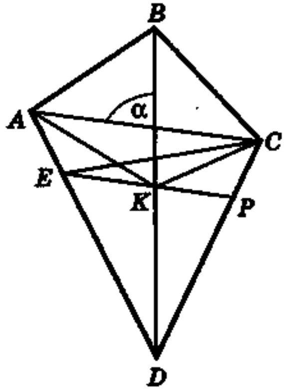


Рис. 159

Решение. Пусть K — середина диагонали BD, P — точка пересечения данной прямой со стороной CD четырехугольника $ABCD$ (рис. 159). Тогда $S_{\triangle ACE} = S_{\triangle ACM}$, где M — любая точка прямой PE (почему?). Значит, $S_{ABCE} = S_{ABCM}$.

Возьмем в качестве M точку K — середину диагонали BD. Тогда $S_{ABCE} = S_{ABCK} = \frac{1}{2} BK \cdot AC \cdot \sin\alpha$, где α — угол между диагоналями данного четырехугольника. Так как $BK = \frac{1}{2} BD$, то $S_{ABCK} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin\alpha\right)$. Значит, $S_{ABCE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.

214. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке H. Известно, что $AD = 2\sqrt{5}$, а треугольники

ABH и CDH равновелики. Найдите длину стороны BC, если $S_{ABCD} < 20$, $S_{\triangle ABH} = S_{\triangle CDH} = 5$.

215. Докажите, что площадь четырехугольника, имеющего равные диагонали, равна произведению отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

216. Два равнобедренных прямоугольных треугольника ABM и CDM с гипотенузами AB и CD расположены так, что $ABCD$ — четырехугольник. Одна диагональ этого четырехугольника равна a. Найдите его площадь.

217. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом 60°, а их длины относятся как 1 : 3. Чему равна меньшая диагональ четырехугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{13}$?

Четырехугольник и окружность

218. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = 19$ см, $BC = 7$ см, $CD = 15$ см, $AD = 21$ см. Стороны AB и CD продолжены до взаимного пересечения в точке M. Найдите длины отрезков MB и MC.

219. Вершины B, C и D четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O, которая пересекает сторону AB в точке M, а сторону AD — в точке E. Известно, что угол BAD — прямой, длина хорды ME равна длине хорды BM и длины хорд BC, CD и ED равны между собой. Найдите величину угла ABO.

220. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин прямоугольника, вписанного в эту окружность, если длины сторон прямоугольника равны 6 и 8.

221. Около выпуклого четырехугольника $ABCD$ описана окружность радиуса 2. Найдите длину стороны CD, если диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и $AB = 3$.

Окружности

222. Две окружности радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$) касаются внутренним образом в точке A. Через точку B большей окружности проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найдите AB, если $BC = a$.

223. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 см и 23 см. Найдите радиус окружности.

224. Через точки пересечения двух окружностей проведены параллельные прямые. Докажите, что они пересекают окружности в вершинах параллелограмма.

225. На отрезке AC длиной 12 см взята точка B так, что $AB = 4$ см. На отрезках AB и AC, как на диаметрах, в одной полуплоскости с границей AC построены полуокружности. Найдите радиус окружности, касающейся построенных полуокружностей и прямой AC.

226. К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r проведена секущая так, что окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найдите длины этих отрезков.

227. Найдите диаметр окружности, если его концы удалены от некоторой прямой, касающейся окружности, на 18 и 12.

228. Две окружности радиусов r и R касаются внешним образом в точке P. К ним проведены внешняя касательная AB и внутренняя касательная PK. (A и B — точки касания прямой AB и окружностей, K лежит на AB.) Найдите: а) AB; б) PK; в) величину угла APB.

229. Две окружности радиусов r и R ($R > r$) касаются внешним образом. К ним проведена внешняя касательная. Найдите радиусы всех окружностей, касающихся двух данных окружностей и проведенной общей касательной.

230. Две окружности радиусами 8 и 6 пересекаются в точках A и B. Через центры O_1 и O_2 проведена прямая; C_1 и C_2 — две из четырех точек пересечения этой прямой с окружностями, точка C_1 лежит на окружности с центром O_1, а $C_1C_2 > 20$. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $S_{\triangle AC_1O_1} \times S_{\triangle BC_2O_2} = 336$.

231. Две окружности, отношение радиусов которых равно $9 - 4\sqrt{3}$, касаются внутренним образом. Проведены две равные хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей. Найдите острый угол между этими хордами.

232. В треугольнике ABC, в котором сторона $AB = 3$, $AC = 5$ и $BC = 7$, проведена биссектриса AM. Вокруг треугольника ABM описана окружность, а в треугольник ACM вписана окружность. Найдите произведение их диаметров.

233. Три данные окружности одинакового радиуса попарно касаются друг друга. Найдите отношение радиусов двух окружностей, каждая из которых касается трех данных. (В ответе записать отношение большего радиуса к меньшему.)

Многоугольники

234. В правильном шестиугольнике со стороной 5 на одной из сторон взята точка A на расстоянии 1 от ближайшей вершины шестиугольника. Найдите расстояние от точки A до центра шестиугольника.

235. Около правильного шестиугольника со стороной 2 описана окружность. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки этой окружности до всех вершин данного шестиугольника.

236. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ площадь каждого из треугольников ABC, BCD, CDE, DEA равна S, а площадь треугольника BAE равна $\frac{8}{3}S$. Найдите площадь пятиугольника.

Векторы и координаты

237. Найдите множество всех таких точек B, что $|AB| = p$, где A — произвольная точка данной прямой l и $p \neq 0$.

238. Дан вектор $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$. Найдите множество всех таких точек C, что: а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|$; б) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|$.

239. Дан вектор $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$. Найдите множество всех таких точек C, что: а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BC}|$.

240. Даны два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найдите множество всех таких точек M, что: а) $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, где $\alpha \in R$; б) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$, где $\beta \in [0; 1]$; в) $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$, где $\alpha \in [0; 1]$; $\beta \in [0; 1]$.

241. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, причем $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм?

242. Докажите, что в трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

243. В треугольнике ABC точка K делит сторону AC в отношении $3 : 2$, считая от точки A; отрезок BK пересекает медиану AP в точке M. Найдите отношения $BM : MK$ и $AM : MP$.

244. В треугольнике ABC точка K делит сторону BC в отношении $1 : 2$, считая от точки B; точка H делит сторону AC в отношении $2 : 3$, считая от точки A; отрезки BH и AK пересекаются в точке M. Найдите отношения $BM : MH$ и $AM : MK$.

245. В треугольнике ABC точка K делит сторону BA в отношении $3 : 5$, считая от точки B; точка H делит сторону BC в отношении $1 : 2$, считая от точки B; медиана BM пересекает отрезок KH в точке O. Найдите отношение $BO : OM$.

246. Найдите уравнение множества всех таких точек M, что вектор $\overrightarrow{AM}$ имеет ту же длину, что и вектор $\vec{a}(7; 1)$, если точка A имеет координаты $(1; -5)$.

247. Две медианы треугольника взаимно перпендикулярны и равны 6 и 8. Найдите третью медиану треугольника.

248. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 7$. Найдите биссектрису AA_1.

249. Найдите условие, которому удовлетворяют координаты вершины прямого угла треугольника с гипотенузой AB, если $A(3;\ 5)$, $B(7;\ -11)$.

250. Найдите условие, которому удовлетворяют координаты середины гипотенузы прямоугольного треугольника с вершиной прямого угла $C(3;\ 5)$ и длинами катетов 2 и 8.

251. Найдите геометрическое место таких точек K, что $KA = 3KB$, где $A(1;\ 0)$, $B(5;\ 0)$.

252. Выясните взаимное расположение окружностей $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ и $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$.

253. Составьте уравнение окружности радиуса 10, касающейся окружности $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ в точке $M(3;\ 1)$.

254. Какое множество точек задает уравнение $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 26x^2 - 26y^2 + 25 = 0$?

255. Через точку $M(3;\ 4)$ проведена прямая, высекающая на окружности $x^2 + y^2 = 100$ хорду, которая точкой M делится пополам. Составьте уравнение прямой и найдите длину хорды.

256. Через точку $M(5;\ 12)$ проведена хорда, наиболее удаленная от центра окружности $x^2 + y^2 = 194$. Найдите длину этой хорды.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Список основных теорем 10 класса

1. О плоскости, проходящей через прямую и не принадлежащую ей точку.
2. О плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые.
3. О плоскости, проходящей через две параллельные прямые.

---

4. Признак скрещивающихся прямых.
5. О двух параллельных прямых, одна из которых пересекает плоскость.
6. О прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку пространства, не принадлежащую данной прямой.
7. О транзитивности параллельности прямых в пространстве.
8. Об углах между сонаправленными лучами.

---

9. Признак параллельности прямой и плоскости.
10. О линии пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости.
11. О линии пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через одну из параллельных прямых.
12. О прямой, параллельной каждой из двух пересекающихся плоскостей.
13. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
14. О двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости.
15. О двух прямых, перпендикулярных одной и той же плоскости.
16—17. Теоремы о трех перпендикулярах.

18—19. Признаки параллельности плоскостей.
20. О прямых пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.
21. О прямой, пересекающей одну из параллельных плоскостей.
22. О плоскости, пересекающей одну из параллельных плоскостей.
23. О плоскости, проходящей через точку и параллельной другой плоскости, не проходящей через эту точку.
24. О двух плоскостях, параллельных третьей плоскости.
25. Об отрезках параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями.

26. О прямой, перпендикулярной одной из двух параллельных плоскостей.
27. О линейных углах двугранного угла.
28. Признак перпендикулярности плоскостей.
29. О прямой, лежащей в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярной линии пересечения этих плоскостей.
30. О перпендикуляре к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, имеющем с другой плоскостью общую точку.
31. О линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости.
32. О площади ортогональной проекции многоугольника.

33. Признак коллинеарности векторов.
34. О разложении вектора по двум компланарным векторам.
35. Признак компланарности векторов.
36. О разложении вектора в пространстве.

Список задач на построение в пространстве

1. Построение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.
2. Построение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной плоскости.
3. Построение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.
4. Построение плоскости, проходящей через данную прямую и параллельной данной прямой.
5. Построение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой.
6. Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости.
7. Построение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной данной плоскости.
8. Построение двух параллельных плоскостей, каждая из которых проходит через одну из двух скрещивающихся прямых.
9. Построение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной каждой из двух скрещивающихся прямых.
10. Построение «общего перпендикуляра» двух скрещивающихся прямых.
11. Построение линейного угла данного двугранного угла.

12. Построение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости.

13. Построение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной данной плоскости.

14. Построение точек пересечения прямой, лежащей на одной из граней многогранника, с плоскостями граней, не параллельных этой прямой.

15. Построение прямой пересечения плоскости грани многогранника с непараллельной ей плоскостью.

Формулы планиметрии

Треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = a + b + c$; $p = \frac{a+b+c}{2}$	a, b, c — длины сторон; p — полупериметр
Сумма внутренних углов	$A + B + C = 180°$	A, B, C — величины углов
Теорема косинусов	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	a, b, c — длины сторон; A, B, C — величины углов
Теорема синусов	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
Радиус описанной окружности (R)	$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$; $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$; $S = pr$; $S = \frac{abc}{4R}$	a, b, c — длины сторон; h_a, h_b, h_c — длины высот; A, B, C — величины углов; p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности
Формула Герона	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Связь между медианой и сторонами	$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$	a, b, c — длины сторон; m_a — длина медианы к стороне a; m, n — длины отрезков, на которые биссектриса угла C делит сторону c; h_a, h_b, h_c — длины высот; r — радиус вписанной окружности
Свойство биссектрисы внутреннего угла	$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$	
Связь между высотами и радиусом вписанной окружности	$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$	
Отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, имеющих равные углы с вершинами A и A_1	$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$	S_{ABC} и $S_{A_1B_1C_1}$ — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$

Прямоугольный треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма острых углов	$A + B = 90°$	A, B — величины острых углов
Теорема Пифагора	$a^2 + b^2 = c^2$	a, b — длины катетов; c — длина гипотенузы; h_c — длина высоты
Метрические соотношения	$h_c^2 = a_1 \cdot b_1$; $a^2 = c \cdot a_1$, $b^2 = c \cdot b_1$	

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Зависимость между сторонами, радиусами вписанной и описанной окружностей	$R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $r = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$; $R + r = \frac{1}{2}(a+b)$	a_1, b_1 — длины проекций катетов на гипотенузу; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2}ab$	a, b — длины катетов

Правильный треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 3a$	a — длина стороны
Величина угла	$A = B = C = 60°$	A, B, C — величины углов
Зависимость между высотой и стороной	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	h — длина высоты; a — длина стороны; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности
Зависимость между стороной, радиусами вписанной и описанной окружностей	$a = R\sqrt{3}$; $R = 2r$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	
Выражение площади (S) через: сторону, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; $S = 3r^2\sqrt{3}$	a — длина стороны; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности

Четырехугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма углов	$A+B+C+D=360°$	A, B, C, D — величины углов; A, C и B, D — величины пар противоположных углов
Свойство сумм величин противоположных углов вписанного четырехугольника	$A+C=B+D=180°$	
Свойство сумм длин противоположных сторон описанного четырехугольника	$a+c=b+d$	a, c и b, d — длины пар противоположных сторон; m, n — длины диагоналей
Теорема Птолемея	$mn=ac+bd$	
Площадь (S)	$S=\frac{1}{2}mn\sin\varphi$; $S=pr$	m, n — длины диагоналей; φ — величина угла между ними; p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности

Параллелограмм

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P=2(a+b)$	a, b — длины сторон; m, n — длины диагоналей; h_a, h_b — длины высот; B — величина угла между сторонами; m, n — длины диагоналей; φ — величина угла между диагоналями
Соотношение между квадратами длин сторон и диагоналей	$m^2+n^2=2(a^2+b^2)$	
Площадь (S)	$S=a\cdot h_a=b\cdot h_b$; $S=ab\sin B$; $S=\frac{1}{2}mn\sin\varphi$	

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Свойства углов	$A + B + C + D = 360°$; $A = C$; $B = D$; $A + B = B + C = 180°$	A, B, C, D — величины углов

Прямоугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 2(a + b)$	a, b — длины сторон; d — длина диагонали; φ — величина угла между диагоналями
Площадь (S)	$S = ab$; $A = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$	

Ромб

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 4a$	a — длина стороны; h — длина высоты; m, n — длины диагоналей
Площадь (S)	$S = ah$; $S = \frac{1}{2} mn$	

Квадрат

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Углы	$A = B = C = D = 90°$	A, B, C, D — величины углов
Связь между длиной стороны и радиусом описанной окружности	$a = R\sqrt{2}$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	a — длина стороны; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Связь между длиной стороны и радиусом вписанной окружности	$r = \frac{a}{2}$; $a = 2r$	a — длина стороны; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности
Площадь (S)	$S = a^2$; $S = 2R^2$	

Трапеция

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Свойство средней линии	$m = \frac{a+b}{2}$	m — длина средней линии; a, b — длины оснований; h — длина высоты
Площадь (S)	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S = m \cdot h$	

Правильный многоугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма внутренних углов (Σ)	$\Sigma = (n-2) \cdot 180°$	n — число сторон; A — величина угла; a_n — длина стороны; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности
Угол	$A = \frac{180°(n-2)}{n}$	
Связь между длиной стороны и радиусом вписанной окружности	$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$; $r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180°}{n}}$;	
Связь между длиной стороны и радиусом вписанной окружности	$a_n = 2R \sin \frac{180°}{n}$; $a_3 = R\sqrt{3}$; $a_4 = R\sqrt{2}$; $a_6 = R$	

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2}arn$; $S = \frac{1}{2}R^2 n \sin\frac{360^\circ}{n}$	a — длина стороны; n — число сторон; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности

Окружность и круг

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Длина окружности (C)	$C = 2\pi R$	C — длина окружности; R — радиус окружности; n — градусная мера дуги; φ — радианная мера дуги; R — радиус круга; d — диаметр; b — основание сегмента; h — высота сегмента
Длина дуги (l)	$l = \frac{\pi R n}{180}$; $l = \varphi R$	
Площадь круга (S)	$S = \pi R^2$; $S = \frac{\pi d^2}{4}$	
Площадь сектора (S)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$	
Площадь сегмента (S)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \pm S_\Delta$; $S = \frac{2}{3}bh$	

Тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$;

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$
$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha;$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha;$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2\alpha; \quad \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2\alpha; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}.$$

Формулы стереометрии

Векторы и координаты

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Правило треугольника	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	A, B, C — произвольные точки
Правило параллелограмма	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$	$OACB$ — параллелограмм
Правило многоугольника	$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$	$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ — произвольные точки
Правило параллелепипеда	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1}$	OA, OB, OC — ребра параллелепипеда; OC_1 — диагональ параллелепипеда
Формула вычитания	$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$	A, B, O — произвольные точки
Признак коллинеарности двух ненулевых векторов	$\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, $\lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert$	k — число, отличное от нуля, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$
Признак компланарности трех векторов	$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$	x, y — числа

Продолжение таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Середина отрезка	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$	M — середина отрезка AB; O — произвольная точка
Точка пересечения медиан (*центроид*)	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$	M — центроид треугольника ABC; O — произвольная точка
Скалярное произведение векторов	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$	$\vec{a}$, $\vec{b}$ — ненулевые векторы
Сложение и вычитание векторов в координатах	$\vec{a} \pm \vec{b}\,(x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$	$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$
Умножение вектора на число	$k\vec{a}(kx; ky; kz)$	k — число; $\vec{a}(x; y; z)$
Скалярное произведение	$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$; φ — величина угла между векторами
Косинус угла между векторами	$\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$	

Продолжение таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Длина вектора	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\vec{a}(x; y; z)$
Расстояние между точками A и B	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$	$A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$
Уравнение плоскости	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	$\vec{a}(A; B; C)$ — вектор, перпендикулярный плоскости; $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, принадлежащая плоскости
Общее уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0$	$M(x; y; z)$ — произвольная точка плоскости
Косинус угла между двумя плоскостями	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$;	φ — величина угла между этими плоскостями; $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — плоскости
Условие перпендикулярности двух плоскостей	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;	
Условие параллельности двух плоскостей	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$	

Продолжение таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Расстояние от точки до плоскости (d)	$d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка; $Ax + By + Cz + D = 0$ — плоскость
Параметрические уравнения прямой	$\vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{p}$; $\begin{cases} x = x_0 + ka_1, \\ y = y_0 + ka_2, \\ z = z_0 + ka_3 \end{cases}$	$\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой; $\vec{r}_0$ — радиус-вектор данной точки прямой; $\vec{p}$ — направляющий вектор прямой; k — параметр; $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — данная точка прямой; $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка прямой; $\vec{p}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ — направляющий вектор прямой
Уравнения прямой по двум ее точкам	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$	$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ — данные точки; $\vec{p}_1(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\vec{p}_2(b_1;\ b_2;\ b_3)$ — направляющие векторы прямых; φ — величина угла между ними

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Косинус угла между двумя прямыми	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\rvert}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$	$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ — данные точки; $\vec{p}_1(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\vec{p}_2(b_1;\ b_2;\ b_3)$ — направляющие векторы прямых; φ — величина угла между ними
Условие перпендикулярности двух прямых	$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$	
Условие параллельности двух прямых	$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$	
Синус угла между прямой и плоскостью	$\sin\varphi = \dfrac{\lvert Aa_1 + Ba_2 + Ca_3\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$	$Ax + By + Cz + D = 0$ — плоскость; $\vec{p}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ — направляющий вектор прямой; φ — величина угла между прямой и плоскостью
Условие параллельности прямой и плоскости	$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$	
Условие перпендикулярности прямой и плоскости	$\dfrac{A}{a_1} = \dfrac{B}{a_2} = \dfrac{C}{a_3}$	

Многогранники

Содержание формулы	**Формула**	**Символы (обозначения)**
Площадь поверхности куба (S)	$S = 6a^2$	a — длина ребра куба
Площадь боковой поверхности прямой призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot h$	P — периметр основания; h — высота (длина бокового ребра)
Площадь боковой поверхности наклонной призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	P — периметр перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	P — периметр основания; l — длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot a$ $S_{бок} = \frac{Q}{\cos \varphi}$	P — периметр основания; a — апофема; Q — площадь основания; φ — величина двугранного угла при стороне основания
Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \frac{P + P_1}{2} \cdot h$	P, P_1 — периметры оснований; h — апофема
Объем куба (V)	$V = a^3$	a — длина ребра куба
Объем прямоугольного параллелепипеда (V)	$V = abc$	a, b, c — измерения параллелепипеда

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Объем призмы (параллелепипеда) (V)	$V = S_{осн} \cdot h$; $V = Q \cdot l$	$S_{осн}$ — площадь основания; h — высота; Q — площадь перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра
Объем пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S_{осн}$ — площадь основания; h — высота
Объем усеченной пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} h\left(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2\right)$	Q_1, Q_2 — площади оснований; h — высота
Отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, имеющих равный трехгранный угол $A = A_1$	$\frac{V_{ABCD}}{V_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot A_1D_1}$	V_{ABCD} и $V_{A_1B_1C_1D_1}$ — объемы тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$

Фигуры вращения

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности цилиндра ($S_{бок}$)	$S_{бок} = 2\pi R \cdot h$	R — радиус основания; h — высота
Площадь полной поверхности цилиндра ($S_{полн}$)	$S_{полн} = 2\pi R(h + R)$	R — радиус основания; h — высота
Площадь боковой поверхности конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi Rl$	R — радиус основания; l — длина образующей

Продолжение таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь полной поверхности конуса ($S_{полн}$)	$S_{полн} = \pi R(l + R)$	R — радиус основания; l — длина образующей
Площадь боковой поверхности усеченного конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi l(R + r)$	R, r — радиусы оснований; l — длина образующей
Площадь сферы (S)	$S = 4\pi R^2$	R — радиус сферы
Площадь сегментной поверхности (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R — радиус сферы; H — высота сегментной поверхности
Площадь шарового пояса (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R — радиус шара; H — высота шарового пояса
Площадь поверхности шарового сектора (S)	$S = \pi R \cdot (2h + \sqrt{2Rh - h^2})$	R — радиус шара; h — высота шарового сегмента
Объем цилиндра (V)	$V = \pi R^2 \cdot H$	R — радиус основания; H — высота
Объем конуса (V)	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$	R — радиус основания; H — высота
Объем усеченного конуса (V)	$V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + Rr + R^2)$	R, r — радиусы оснований; H — высота
Объем шара (V)	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V = \frac{1}{6}\pi d_3$	R — радиус шара; d — диаметр шара

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Объем шарового слоя (V)	$V = \frac{\pi H}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2)$	r_1, r_2 — радиусы оснований шарового слоя; H — высота
Объем шарового сегмента (V)	$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$ $V = \frac{\pi H}{6}(3r^2 + H^2)$	R — радиус шара; H — высота; r — радиус основания шарового сегмента
Объем шарового сектора (V)	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot H$	R — радиус шара; H — высота

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 1. Введение в стереометрию

1.004. *Указание. Рассмотрите случаи:* а) *AB — диаметр окружности;* б) *AB — хорда, не являющаяся диаметром окружности.* **1.009.** Прямая. **1.010.** Нет. **1.012.** Можно, если одна (любая) из точек находится в плоскости, которая проходит через три оставшиеся точки. **1.013.** а) Нет; б) нет. **1.014.** *Указание. Через любые три точки данной фигуры проведите плоскость и докажите, что все остальные точки фигуры принадлежат этой плоскости.* **1.015.** *Указание. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость.* **1.016.** *Указание. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость.* **1.017.** Лежат в одной плоскости. **1.018.** Три прямые проходят через одну точку. **1.019.** *Указание. Эти прямые не лежат в одной плоскости.* **1.020.** *Указание. Проведите прямую, пересекающую все три данные прямые.* **1.023.** Нельзя. **1.024.** Верно. **1.025.** а) Можно; б) нельзя; в) нельзя; г) можно; д) можно; е) можно. **1.026.** *Указание. Три данные прямые лежат в одной плоскости.* **1.027.** Не может. **1.031.** а) AM; б) CD; в) AC; г) BD. **1.032.** 4 или 14. **1.035.** а) AA_1; б) CC_1; в) AB_1; г) CD_1; д) BC. **1.038.** $3\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.039.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **1.040.** в) 6; г) Y_2; д) NY_2; е) 1 : 3. **1.042.** Шесть. **1.043.** Прямые проходят через одну точку или параллельны. **1.051.** Неверно. **1.052.** 4 : 1. **1.053.** а) Треугольник прямоугольный, так как его ортоцентр лежит на прямой, содержащей его сторону; б) треугольник равнобедренный ($DE = DF$), так как его медиана является его и биссектрисой; в) треугольник DEF — прямоугольный, так как треугольник KDF — прямоугольный. Центр описанной около треугольника KDF окружности лежит на его стороне DK. **1.055.** $5\sqrt{7}$. **1.056.** $5\sqrt{7}$. **1.057.** Трапеция; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{a\sqrt{5}}{2}$; $\frac{a\sqrt{17}}{4}$. **1.058.** $A_1B_1 = a$. **1.059.** Трапеция; $\frac{a}{2}$. **1.060.** Трапеция. **1.061.** $3\sqrt{13}$. **1.062.** $\sqrt{3}$. **1.063.** $5\sqrt{2}$. **1.064.** $3\sqrt{3}$; $12\sqrt{3}$; $12\sqrt{3}$. **1.066.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **1.067.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{2}$. **1.068.** в) 4; г) X_1; д) KX_2; е) 1 : 1. **1.069.** в) $8\sqrt{17}$; д) 1 : 1; е) BM. **1.070.** $\frac{a}{3}$; $\frac{2a}{3}$. **1.071.** Равнобедренный треугольник; $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Глава 2. Прямые в пространстве

2.001. *Указание. Примените признак скрещивающихся прямых.* **2.003.** Любая прямая грани AA_1B_1B, проходящая через точку A_1, пересекает скрещивающиеся прямые A_1D_1 и BB_1. **2.005.** Нет. **2.006.** Параллельны. **2.007.** Шесть. **2.008.** Могут пересекаться, скрещиваться. **2.009.** Не могут. **2.010.** Параллелограмм. *Указание. Воспользуйтесь свойством средней линии треугольника.* **2.011.** *Указание. Примените теорему 3 и аксиому прямой и плоскости.* **2.016.** 1) а) 6; б) 15; 2) а) 1; б) 29. **2.017.** а) Плоскость; б) плоскость; в) $\varnothing$. **2.018.** а) Скрещиваются; б) скрещиваются; в) скрещиваются; г) параллельны; д) скрещиваются; е) пересекаются; ж) скрещиваются; з) пересекаются. **2.019.** $MM_1 = 9$; $OO_1 = 11$; $DD_1 = 7$. **2.020.** а) Могут быть параллельными, пересекаться; б), в) могут быть параллельными, пересекаться, скрещиваться. **2.021.** Нет. **2.022.** *Указание. Рассмотрите плоскость $\alpha = (a, c)$ и точку ее пересечения с прямой b. Найдите множество всех точек C, для которых задача не имеет решения.* **2.023.** а) Не могут; б) $0 < C_1C_2 < 14$. **2.024.** 7; 2. **2.026.** Параллелограмм, плоскость которого параллельна BC и AD. **2.027.** а) Скрещиваются; б) пересекаются; в) параллельны; г) пересекаются; д) параллельны; е) скрещиваются; ж) скрещиваются. **2.028.** 1) а) Скрещиваются; б) скрещиваются; в) пересекаются; г) параллельны; д) скрещиваются; е) скрещиваются; 2) а) 2 : 3; б) 1 : 3. **2.029.** в) 3 : 1. **2.030.** *Указание. Концы этого отрезка — центры граней тетраэдра.* **2.031.** 1) а) 30°; б) 90°; в) 150°; 2) а) 30°; б) 90°; в) 45°. **2.032.** а), б) Да; в) нет. **2.033.** Перпендикулярны. Может. **2.034.** а) 60°; б) 45°; в) 0°; г) 30°; д) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.035.** $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

2.037.

	Прямые	Расположение	Угол между прямыми
1	LN и EG	Скрещиваются	90°
2	F_1T и FH	Пересекаются	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$
3	F_1N и KT	Параллельны	0°
4	TN и EG	Скрещиваются	60°
5	F_1T и KN	Пересекаются	$\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$
6	KH_1 и LN	Скрещиваются	30°

2.038. 60°. **2.039.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **2.040.** *Указание. Обозначим* $\alpha = (a, c)$. *Все прямые пространства, параллельные c и пересекающие a, лежат в плоскости* α, *и ни одна из них не пересекает прямую b. Аналогично, все прямые пространства, параллельные c и пересекающие b, скрещиваются с a. Все остальные прямые, параллельные c, скрещиваются и с a, и с b.* **2.041.** 8 и 3. **2.042.** в) 3 : 1. **2.043.** 2) Тетраэдр $M_1M_2M_3M_4$ — правильный с ребром 2. 3) а) 60°; б) 90°; в) 90°; г) 30°. **2.044.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **2.045.** 1) а) Скрещиваются; б) скрещиваются; в) параллельны; г) скрещиваются; 3) а) 1 : 2; б) 1 : $\sqrt{2}$; в) 1 : $\sqrt{6}$; 4) а) 60°; б) 60°; в) 90°; г) 30°; д) 45°. **2.046.** 58.

2.047.

	Прямые	Расположение	Угол между прямыми
1	AA_1 и CC_1	Параллельны	0°
2	A_1C_1 и B_1D_1	Пересекаются	90°
3	A_1C_1 и C_1D_1	Пересекаются	45°
4	A_1M и CC_1	Скрещиваются	90°
5	A_1D и DC_1	Пересекаются	60°
6	A_1C_1 и BD	Скрещиваются	90°
7	A_1C и AC	Пересекаются	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$
8	A_1B и D_1C	Параллельны	0°
9	A_1C и BB_1	Скрещиваются	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$
10	A_1D и AC	Скрещиваются	60°
11	A_1M и BC	Скрещиваются	arctg 2
12	A_1M и BK	Скрещиваются	90°
13	C_1K и B_1F	Скрещиваются	$2\arcsin\sqrt{0{,}4}$
14	C_1O и AB_1	Скрещиваются	30°
15	A_1B и B_1D	Скрещиваются	90°

2.053. При длине 6 прямые пересекаются, при остальных — скрещиваются. **2.054.** $2\sqrt{2}$.

Глава 3. Прямая и плоскость в пространстве

3.002. а) Да; б) нет. **3.003.** Нет. **3.004.** *Указание. Рассмотрите случаи, когда прямые:* а) *параллельны;* б) *пересекаются;* в) *скрещиваются.* **3.006.** 1 — А; 2 — В; 3 — А; 4 — Б; 5 — Б; 6 — В; 7 — А; 8 — Б. **3.007.** Параллельны. **3.008.** Могут пересекаться или быть параллельными. **3.009.** Могут скрещиваться или быть параллельными. **3.010.** Они параллельны. **3.012.** а) Нет; б) нет; в) нет. **3.015.** 1. **3.017.** Трапеция. **3.018.** $12\sqrt{11}$. **3.021.** Нет. **3.022.** а) Параллельны; б) параллельны; в) параллельны; г) параллельны; д) параллельны; е) пересекаются. **3.024.** Равнобедренные треугольники; $4\sqrt{11}$. **3.025.** Равнобедренная трапеция периметра 10 и площади $3\sqrt{3}$. **3.026.** $4(1 + \sqrt{3}) < P < 2(2 + 3\sqrt{3})$; $4\sqrt{2} < S < 4\sqrt{6}$. **3.028.** $50\sqrt{6}$. **3.033.** $4\sqrt{7}$. **3.034.** 18 см. **3.035.** 10. **3.045.** Правильно: *один круг* или два равных круга. **3.046.** *Указание. Используйте свойство медианы равнобедренного треугольника.* **3.051.** а) Нет; б) вообще говоря, нет. **3.053.** *Указание. Воспользуйтесь теоремой о трех перпендикулярах.* **3.056.** *Указание. Воспользуйтесь теоремой о трех перпендикулярах.* **3.057.** а) 0; б) $a \cos \alpha$; в) $-a \cos \alpha$; г) $\frac{a-b}{2}$. **3.059.** Прямая BD. **3.060.** *Указание. Угол MLN — прямой.* **3.063.** *Указание. Прямая AC перпендикулярна плоскости (BOD).* **3.064.** *Указание. Прямая OM перпендикулярна плоскости трапеции, а угол ACD — прямой.* **3.065.** Угол ACM. *Указание. Воспользуйтесь теоремой о трех перпендикулярах.* **3.066.** *Указание.* а) *Плоскости OMP и BCP взаимно перпендикулярны;* б) *плоскости* (OPP_1 *и ABP взаимно перпендикулярны.* **3.070.** а) 2; б) $\sqrt{7}$. **3.071.** а) $2\sqrt{3}$; б) 6. **3.072.** $\sqrt{2b^2 - a^2}$. **3.073.** $\sqrt{34}$; $\sqrt{41}$. **3.074.** $6\sqrt{6}$ см; 9π см^2. **3.075.** 5 см. **3.076.** 13 см. **3.077.** а) 22 см; б) 14 см; в) 18 см. **3.078.** 17 при любом a. **3.079.** 9 см; $6\sqrt{3}$ см. **3.080.** $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. **3.081.** 10. **3.082.** в) $\sqrt{2}$. **3.083.** 60°. **3.084.** Нет. 45°. **3.086.** 60°. **3.087.** а) 45°; б) 45°. **3.088.** φ. **3.089.** 45°. **3.090.** 30°.

3.091. 10°. **3.093.** $b \sin\varphi$ и $a \sin\varphi$. **3.094.** 45° и 60°. **3.095.** а) 30°; б) 45°; в) 30°; г) $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$; д) $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$. **3.096.** а) 30°; б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$; в) $\arcsin\frac{3}{4}$; г) $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$; д) $\arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}$; е) 0.

3.097.

	Прямая и плоскость	Измеряемый плоский угол	Величина угла
1	*MC* и *ABC*	Угол *MCD*	45°
2	*MB* и *ABC*	Угол *MBD*	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$
3	*MA* и *ABC*	Угол *MAD*	45°
4	*MO* и *ABC*	Угол *MOD*	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$
5	*AC* и *MDC*	Угол *ACD*	45°
6	*AD* и *MDC*	—	90°
7	*AB* и *MDC*	—	0°
8	*OK* и *MDC*	—	90°
9	*OM* и *MDC*	Угол *OMK*	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}$
10	*AC* и *OAM*	—	0°
11	*AO* и *ADM*	Угол *CAD*	45°

3.098.

	Прямая и плоскость	Измеряемый плоский угол	Величина угла
1	*KA* и *ABC*	Угол *KAB*	45°
2	*KM* и *ABC*	Угол *KMB*	$\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$
3	*CA* и *MBK*	—	90°
4	*BA* и *BMK*	Угол *ABM*	30°
5	*AC* и *KBA*	Угол *CBA*	60°
6	*BM* и *KBA*	Угол *MBA*	30°

Окончание таблицы

7	*AK* и *BKM*	Угол *AKM*	$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$
8	*BK* и *ACK*	Угол *BKM*	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$
9	*MB* и *ACK*	Угол *BMK*	$\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}$
10	*AK* и *BCK*	—	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{15}}{5}$

3.099.

	Прямая и плоскость	Измеряемый плоский угол	Величина угла
1	*MC* и *ABC*	Угол *MCO*	$\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$
2	*MK* и *ABC*	Угол *MKO*	$\arccos \frac{1}{3}$
3	*CB* и *AMK*	—	90°
4	*CA* и *AMK*	Угол *CAK*	30°
5	*OC* и *AMK*	Угол *COK*	60°
6	*CM* и *AMK*	Угол *CMK*	30°
7	*PB* и *AMK*	Угол *BPK*	60°
8	*AP* и *MBC*	—	90°
9	*OM* и *MBC*	Угол *OMK*	$\arcsin \frac{1}{3}$
10	*AK* и *MBC*	Угол *MKA*	$\arccos \frac{1}{3}$
11	*MB* и *ACP*	—	90°
12	*BC* и *ACP*	Угол *BCP*	30°

3.100.

	Прямая и плоскость	Величина угла
1	AB_1 и ABC	45°
2	AC и AA_1B	45°
3	MF и DD_1C	45°
4	MF и DD_1B	0°
5	AM и ABC	$\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{5}}{5}$
6	AC и MKF	90°
7	AK и MKF	$\operatorname{arctg} 3$
8	AC_1 и BCC_1	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$
9	C_1D и ACC_1	30°
10	B_1D и ACC_1	$\operatorname{arctg} \sqrt{2}$
11	AA_1 и AMF	$\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{4}$
12	DD_1 и AMF	$\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{4}$

3.104. а) Две точки; прямая; две параллельные прямые; б) прямая; прямая и принадлежащая ей точка; две пересекающиеся прямые; в) прямая и не принадлежащая ей точка; две параллельные прямые; две пересекающиеся прямые. **3.108.** 3,5. **3.109.** Можно. Невозможно. **3.110.** 90°. **3.111.** $2\arcsin\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\varphi}\right)$. **3.113.** $2\sqrt{m^2+2a^2}$. **3.114.** Ромб, $DD_1 = 6$, периметр 20 и площадь $4\sqrt{34}$. **3.115.** $\frac{25\sqrt{6}}{9}$. **3.116.** а) $4\sqrt{3}$; б) $\frac{100}{9\sqrt{3}}$. **3.119.** $\frac{\sqrt{2}}{2} < KH < 1$. **3.123.** 8; $\frac{16}{3}$. **3.124.** $\frac{32}{3}$; 6. **3.129.** Пересекаются в одной точке. **3.131.** *Указание. Спроектируйте ребра PA, PB и PC на плоскость ABC и воспользуйтесь тео-*

ремой о трех перпендикулярах. **3.132.** Окружность с диаметром BC, где C — основание перпендикуляра из A на α. **3.133.** *Указание. Спроектируйте ребра PA, PB и PC на плоскость (ABC) и воспользуйтесь теоремой о трех перпендикулярах.* **3.136.** в) $4\sqrt{2}$; г) $3\sqrt{5}$. **3.140.** $\frac{420}{169}$; $\frac{84}{25}$. **3.141.** 3,5. **3.142.** б) $\frac{2}{3}$; в) 1 : 1. **3.143.** $ab\sqrt{2}$. **3.144.** а) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{8}$; в) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$. **3.145.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; ж) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **3.146.** *Указание.* в) *Спроектируйте точку E на плоскость ABC и воспользуйтесь тем, что $CM \perp AB$.* **3.147.** $\frac{7\sqrt{11}a^2}{24}$; $\frac{7\sqrt{11}a}{22}$. **3.148.** а) 90°; б) 60°. **3.149.** а) 60°; в) 90°. **3.150.** Прямую, перпендикулярную плоскости этого многоугольника и проходящую через центр вписанной в него окружности. **3.151.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **3.153.** 48; 16. **3.154.** б) $\sqrt{3}$; в) 1 : 2. **3.156.** 2 : 7. **3.157.** $[6\sqrt{3};\ 12\sqrt{3}]$. **3.158.** 2π. **3.159.** 1. **3.161.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sin 0{,}5x}$.

Глава 4. Плоскости в пространстве

4.005. *Указание. Используйте теорему о пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.* **4.011.** б) 12. **4.015.** $4\frac{4}{9}$ см². **4.016.** 48 см². **4.017.** 1. **4.018.** 6 или 3. **4.020.** *Указание. Через точку A_1 проведите прямую $c \parallel b$.* **4.021.** *Указание. Через прямые a и b проведите плоскости, параллельные α.* **4.022.** а) Равнобедренная трапеция; 36; б) равнобедренный треугольник; $\frac{15\sqrt{2}}{2}$; в) квадрат; 36. **4.023.** а) 18 см; 15 см; б) 54 см; 72 см. **4.025.** а) $4\sqrt{3}$; б) $\frac{100}{9\sqrt{3}}$. **4.028.** б) $\frac{3(1+2\sqrt{2})a}{4}$; в) $\frac{9\sqrt{7}a^2}{64}$; г) $\frac{3}{5}$. **4.029.** 1 — А; 2 — Б; 3 — В; 4 — А; 5 — Б; 6 — А; 7 — В; 8 — Б; 9 — А; 10 — В; 11 — Б; 12 — А. **4.033.** 4. **4.034.** 90°. **4.035.** $\frac{h}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **4.036.** 75°. **4.037.** 49°. **4.038.** 100° или 80°. **4.039.** $2\sqrt{2}$. **4.041.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. **4.043.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. **4.044.** $6\sqrt{3}$. **4.045.** $50\sqrt{2}$.

4.046. 90°; 45°; 60. **4.047.** $\arccos\frac{1}{3}$. **4.050.** а) 90°; б) arctg 2. **4.051.** 24. **4.053.** $\arccos\frac{1}{3}$. **4.054.** а) 90°; б) 45°; в) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4.055.

	Плоскости	Взаимное расположение	Угол между плоскостями
1	A_1BA и D_1CD	Параллельны	0°
2	$A_1B_1C_1$ и DD_1C	Пересекаются	90°
3	A_1BD и B_1D_1C	Параллельны	0°
4	B_1AC и ADC	Пересекаются	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$
5	A_1BD и C_1DB	Пересекаются	$2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$
6	A_1BD и CC_1A	Пересекаются	90°
7	AB_1C_1 и ADC	Пересекаются	45°
8	A_1MA и B_1C_1C	Пересекаются	arctg 0,5
9	A_1MA и BB_1D	Пересекаются	$0{,}75\pi - \operatorname{arctg} 2$
10	MA_1D и CA_1D	Пересекаются	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$

4.059. Нет. **4.062.** Да. **4.063.** $a\sqrt{\cos 2\varphi}$. **4.064.** а) $5\sqrt{2}$ см и 10 см; б) $5\sqrt{6}$ см и 10 см. **4.065.** а) $4\sqrt{73}$; б) 12. **4.067.** а) 90°; б) 60° или 120°; в) 30°; г) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $2\arcsin\frac{\sqrt{42}}{7}$ или $2\arcsin\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **4.068.** а) $\sqrt{30}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{10}$. **4.069.** а) Да; б) да; в) нет. **4.070.** $8(1 + \sqrt{3})$ и $16\sqrt{2}$. **4.071.** $10(\sqrt{3} + 1)$ и $25\sqrt{2}$. **4.073.** а) 45°; б) $\arccos\frac{1}{5}$. **4.076.** Неверно. **4.077.** а) $3\sqrt{7}$; б) $3\sqrt{3}$. **4.078.** 6. **4.079.** 9. **4.080.** $\sqrt{21}$ или $\sqrt{37}$. **4.081.** а) 4; б) 4; в) не менее 4. **4.082.** а) Скрещиваются; б) параллельны; в) 5. **4.083.** 2,4. **4.084.** 4 или 3.

4.085. Расстояние между TM и DC равно 0; между TM и BC — 1; между TM и AD — 3; между TM и AB — 4; между TM и AC — $\frac{\sqrt{2}}{2}$; между TM и BD — $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4.086.

№	Прямые		Расстояние между прямыми
1	MC	AT	b
2	AB	CD	$b\sin\frac{\alpha}{2}$
3	MT	AC	$0{,}5b\cos\frac{\alpha}{2}$
4	AC	BD	0
5	AB	MD	$0{,}5b\sin\alpha$

4.087.

№	Прямые		Расстояние между прямыми
1	AA_1	DC	a
2	BB_1	DC_1	a
3	DC	A_1K	a
4	DD_1	A_1K	$\frac{2a\sqrt{5}}{5}$
5	B_1D	AC	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$
6	AK	BC	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
7	B_1C	C_1D	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$
8	AK	BD	$\frac{2a\sqrt{17}}{17}$
9	DK	AC_1	0

4.088.

№	Прямые		Расстояние между прямыми
1	AC	MO	$\sqrt{3}$
2	BC	AM	$3\sqrt{2}$
3	OK	PM	0
4	MO	KC	$\frac{3\sqrt{7}}{7}$
5	BO	AM	$\frac{6\sqrt{22}}{11}$

4.089. 2. **4.090.** $\cos\alpha$. **4.091.** $100\sqrt{2}$; только равновелики. **4.092.** $21\sqrt{3}$. **4.093.** а) $a^2\sqrt{6}$; б) $3a^2$. **4.094.** $\arccos\frac{1}{6}$. **4.095.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4.096. а) $\arccos 0{,}75$; в) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{7}}{3}$. **4.097.** $60°$ и $\operatorname{arctg}(3\sqrt{3})$.

4.098. $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **4.099.** $\frac{S}{\cos^{10}\varphi}$ и $\frac{S(1-\cos^{11}\varphi)}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^{10}\varphi}$. **4.100.** $50\sqrt{2}$.

4.101. $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **4.102.** $\frac{30}{7}$ дм². **4.103.** $16\sqrt{2}$ см². **4.104.** 9 см².

4.105. а) $60°$; б) $36\sqrt{3}$ дм². **4.106.** *Указание. Воспользуйтесь признаком параллельности плоскостей.* **4.107.** *Указание. Воспользуйтесь признаком параллельности плоскостей.* **4.109.** 7.
4.111. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$; $\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$. **4.113.** *Указание. Спроектируйте ребра PA, BP и PC на плоскость (ABC) и воспользуйтесь теоремой о трех перпендикулярах.* **4.114.** Окружность с диаметром BC, где C — основание перпендикуляра из A на α. **4.116.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **4.117.** в) a; $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{ab\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2+b^2}}$. **4.118.** в) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{ac\sqrt{3}}{2\sqrt{3a^2+c^2}}$.

4.119. $\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{2\cos\alpha+1}$. **4.120.** $m\sqrt{3}$. **4.121.** $30°$. **4.122.** $\frac{a}{3}$.

4.123. $4\sqrt{17}$.

Глава 5. Расстояния в пространстве

5.001. а) 4; б) 2; в) 8. **5.002.** 1 или 7. **5.003.** 7 : 10. **5.004.** 21 см и 30 см. **5.005.** 119 см и 170 см. **5.006.** Нет. **5.007.** Да. **5.008.** а) 3; б) $9\sqrt{3}$; в) 60°. **5.009.** 90°. **5.010.** а) 4; б) 2; в) 3; г) 2; д) $3\frac{1}{3}$. **5.011.** а) 12; б) 6; в) 3; г) 4. **5.012.** 4. **5.013.** а) 2; б) 1,6; в) $1\frac{1}{3}$; г) $1\frac{1}{7}$. **5.014.** а) 18; б) 9; в) 10. **5.015.** а) 3; б) 2; в) $\frac{2}{3}$; г) 2,5; д) $1\frac{2}{3}$. **5.016.** 8; 8; 8. **5.017.** 4; 4; 4; 8. **5.018.** 3; 5; 8; 8. **5.019.** $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **5.020.** 10. **5.021.** 5. **5.022.** 12. **5.023.** 5 или 11. **5.024.** 5 или 15. **5.025.** 4 или 10. **5.026.** 4 и 8. **5.027.** 6 и 24 или 36 и 6. **5.028.** а) $5\sqrt{3}$; б) $\frac{6\sqrt{66}}{11}$. **5.029.** а) 4; б) 3,2; в) $\frac{16}{\sqrt{17}}$; г) $2\sqrt{2}$. **5.030.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **5.031.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{12}$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

5.032.

№	Прямые		Расстояние между прямыми
1	MM_1	PQ	a
2	NN_1	PQ_1	a
3	PQ	M_1K	a
4	PP_1	M_1K	$\frac{2a\sqrt{5}}{5}$
5	N_1P	MQ	$\frac{a\sqrt{6}}{3}$
6	MQ	NQ	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
7	N_1Q	Q_1P	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$
8	MK	NP	$\frac{8a\sqrt{17}}{17}$
9	PK	MQ_1	0

5.033. Две прямые пересечения плоскости α и двух плоскостей, параллельных плоскости β. **5.034.** Четыре прямые, параллельные прямой пересечения плоскостей α и β. **5.035.** Прямая, параллельная данным прямым, или пустое множество. **5.036.** Прямая пересечения плоскости α и плоскости серединных перпендикуляров отрезка AB или пустое множество, или плоскость α. **5.037.** Прямая, проведенная перпендикулярно плоскости четырехугольника через центр описанной около него окружности. **5.038.** Прямая, проведенная перпендикулярно плоскости четырехугольника через центр вписанной в него окружности. **5.039.** Окружность диаметра AB, где A — основание перпендикуляра AM к плоскости α. **5.040.** Окружность радиуса 3 см, центром которой является ортогональная проекция точки A на плоскость α. **5.041.** Окружность радиуса 6 см, центром которой является ортогональная проекция точки A на линию пересечения плоскостей α и β. **5.042.** 3; 6; 15. **5.043.** 10. **5.044.** $\sqrt{3}$. **5.045.** 4,8. **5.046.** $2\sqrt{2}$. **5.047.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; в) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **5.048.** а) 5; б) 2,5; в) $2\frac{2}{9}$. **5.049.** 9; 9; 9; 27; 27; 27; 45. **5.050.** $\frac{a\sqrt{6}}{18}$. **5.051.** а) 12; б) 12; в) 6; г) 8; д) 4,5. **5.052.** 3,5. **5.053.** $\frac{a\sqrt{2b^2-a^2}}{2b}$. **5.054.** Окружность, плоскость α которой проходит через точку A и перпендикулярна прямой m. Диаметром окружности является отрезок AB, где B — точка пересечения m и α. **5.055.** В плоскости α окружность радиуса 8 см, а в плоскости β — окружность радиуса 6 см. Центрами этих окружностей являются ортогональные проекции точки A на плоскости α и β. **5.062.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **5.063.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **5.064.** $\frac{a^2\sqrt{66}}{44}$. **5.065.** $\frac{6a^2\sqrt{17}}{13}$. **5.066.** $\frac{a^2}{2}$. **5.067.** Семь. **5.069.** $f(x) = 2\sqrt{1+\sin^2\frac{x}{2}}$. **5.070.** [1,4; 5]. **5.071.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет.

Глава 6. Векторный метод в пространстве

6.001. а) Да; б) да; в) нет. **6.003.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{C_1B}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{DC_1}$; е) $\overrightarrow{AC_1}$; ж) $\vec{0}$. **6.005.** а) $\overrightarrow{PE}$. **6.012.** а) −1; б) 2. **6.014.** *Указание. Воспользуйтесь признаком коллинеарности двух векторов.* **6.016.** *Указание. Воспользуйтесь свойством медиан треугольника.* **6.021.** а) $M = C_1$; б) $M = D$; в) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD}$; д) $\overrightarrow{AM} =$

$= 2\overrightarrow{AB}$. **6.027.** Да. **6.030.** *Указание. См.* 6.015, 6.017. **6.031.** $0{,}2\overrightarrow{AD} - 0{,}2\overrightarrow{AB}$. **6.032.** $3H$. **6.033.** а) $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$; б) $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$; в) $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$; г) $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; е) $0\cdot\vec{a} + \vec{b}$. **6.034.** 3. **6.036.** $\overrightarrow{PD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{AE} = -\vec{a} + 0{,}5\vec{c}$. **6.037.** $\overrightarrow{A_1C}(1;\ 1;\ -1)$. **6.038.** Да. **6.039.** а) $0\cdot\vec{a} + 0{,}5\vec{b} + 0{,}5\vec{c}$; д) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; е) $2\vec{a} + 0\cdot\vec{b} - \vec{c}$. **6.040.** а) $(0;\ -1;\ 0{,}5)$; б) $(0;\ 0{,}5;\ 0{,}5)$; г) $\left(-1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$. **6.041.** *Указание. См.* 6.017. **6.042.** *Указание. Используйте признак компланарности трех векторов.* **6.043.** *Указание. Воспользуйтесь признаком коллинеарности двух векторов.* **6.045.** *Указание. Докажите компланарность векторов* $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OH}$ *и* $\overrightarrow{OK}$. **6.046.** *Указание. См.* 6.015. **6.047.** *Указание. Воспользуйтесь признаком компланарности трех векторов.* **6.048.** а) 0,5; лежит внутри треугольника; б) −6,38; лежит вне треугольника. **6.049.** а) Не имеют общих точек; б) точка K — общая; в) отрезок пересекает плоскость; г) отрезок параллелен плоскости. **6.050.** 1 : 8. **6.051.** 1 : 1. **6.052.** 1 : 12. **6.053.** 1 : 1. **6.054.** 5 : 4. **6.055.** 1 : 2. **6.056.** б) Пополам. **6.057.** а) $\overrightarrow{MK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$; б) 6 : 7; в) $\frac{7a\sqrt{6}}{18}$. **6.059.** а) 90°; г) 45°; е) 60°. **6.060.** а) 60°; б) 120°. **6.063.** а) 10; б) $7\sqrt{2}$; в) −10; г) 0; д) −4,9; е) 4. **6.064.** а) 2; д) 0. **6.066.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-2}{2}$. **6.069.** а) 2; г) 0,75. **6.070.** а) $\sqrt{2}$; б) 5; в) 7; г) $2\sqrt{2}$; д) $\sqrt{38}$. **6.071.** а) $2\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{5}$; в) $3\sqrt{3}$; г) $\sqrt{7}$. **6.072.** −3. **6.073.** −13. **6.074.** 11. **6.075.** $\frac{6}{7}$; $-\frac{3}{7}$; $\frac{2}{7}$. **6.076.** $\vec{m} = \sqrt{2}\cdot\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **6.077.** $\left(\frac{3}{\sqrt{14}};\ \frac{1}{\sqrt{14}};\ -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$. **6.078.** −6. **6.079.** $(1;\ 1;\ 1)$. **6.080.** $\left(\frac{3}{\sqrt{34}};\ \frac{3}{\sqrt{34}};\ -\frac{4}{\sqrt{34}}\right)$. **6.081.** а) Нет; б) да. **6.082.** а) $0{,}5a^2$; б) $-0{,}5a^2$; г) $0{,}25a^2$; д) $-0{,}25a^2$. **6.085.** б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; г) $\arccos\frac{1}{6}$. **6.086.** *Указание. Воспользуйтесь признаком перпендикулярности двух векторов.* **6.087.** 1) а) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) а) $\arccos\frac{1}{3}$.

6.088. 2) а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{6}\right)$. **6.089.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

6.090. $\arccos\frac{|2h^2-a^2|}{2(a^2+h^2)}$. **6.093.** а) $-\frac{2}{17}$; б) $\frac{3\sqrt{17}}{34}$. **6.099.** $\frac{2}{3}$.

6.100. а) $\arccos\frac{\sqrt{11}}{22}$; б) 3. **6.101.** а) $\arccos\frac{\sqrt{187}}{561}$; б) $\frac{31\sqrt{2}}{29}$.

6.102. $\arccos\frac{7}{65}$. **6.103.** $\frac{12}{13}$. **6.105.** а) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AC}$. **6.106.** а) Да; б) да.

6.107. *Указание. Докажите, что* $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. **6.109.** *Указание. Воспользуйтесь признаком компланарности трех векторов.* **6.114.** *Указание. Воспользуйтесь признаком компланарности трех векторов.* **6.116.** а) Отрезок; б) параллелограмм; в) параллелепипед. **6.117.** 1 : 3. **6.118.** *Указание. Используйте центроид треугольника ABC.* **6.119.** 2 : 3. **6.120.** *Указание. Введите единичные векторы на ребрах трехгранного угла и используйте свойство диагоналей ромба делить его углы пополам.* **6.121.** *Указание. Отложите единичные векторы от точки пересечения диагоналей параллелепипеда.* **6.123.** *Указание. Воспользуйтесь признаком компланарности трех векторов.* **6.124.** *Указание. Воспользуйтесь сложением векторов по правилу параллелепипеда.* **6.125.** *Указание. Воспользуйтесь признаком компланарности трех векторов.*

Глава 7. Координатный метод в пространстве

7.004. $\vec{a}(2;\ 3;\ -5)$; $\vec{b}(1;\ -4;\ 6)$; $\vec{c}(-3;\ 2;\ -5)$; $\vec{p}(1;\ 0;\ 1)$; $\vec{m}(-2;\ 1;\ 0)$; $\vec{n}(0;\ 0;\ -1)$. **7.005.** $\vec{a}=3\vec{i}+7\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{b}=0\cdot\vec{i}-5\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{c}=-\vec{i}+2\vec{j}+$ $+0\cdot\vec{k}$; $\vec{p}=2\vec{i}+0\cdot\vec{j}-3\vec{k}$; $\vec{q}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+5\vec{k}$. **7.006.** $\vec{p}(5;\ 15;\ -5)$; $\vec{q}(4;\ -18;\ -9)$. **7.007.** $m=4$; $n=-1{,}5$. **7.009.** $|\vec{a}|=5\sqrt{3}$; $|\vec{b}|=7$; $|\vec{c}|=\sqrt{3}$; $|\vec{p}|=\sqrt{10}$. **7.011.** $\vec{a}\cdot\vec{c}=3$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; $\vec{a}^2=6$; $\sqrt{\vec{b}^2}=\sqrt{3}$. **7.012.** (3; –8; 5). **7.013.** При $x=-2$. **7.014.** а) $\widehat{(\vec{a};\vec{b})}>90°$; б) $\widehat{(\vec{b};\vec{c})}<90°$; в) $\widehat{(\vec{a};\vec{c})}=$ $=90°$. **7.015.** Острый угол с $\vec{c}$; тупой — с $\vec{j}$; прямой — с $\vec{k}$. **7.016.** а) 60°; б) 150°; в) 90°. **7.017.** а) 3; б) –4. **7.018.** а) 135°; б) 135°; в) 60°; г) 45°; д) 90°; е) 90°; ж) 0°; з) 180°. **7.019.** 1. **7.020.** $\vec{m}=10\vec{a}-18\vec{b}+11\vec{c}$. **7.021.** $\vec{a}\left(\frac{2}{7};\ -\frac{9}{7};\ \frac{2}{7}\right)$. **7.022.** При $n=\frac{3}{2}$. **7.023.** а) 1; $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}$.

7.024. 1) а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{\frac{7}{2}}$; в) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; 2) а) 60°; б) 90°; в) 60°. **7.025.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\arccos\left(-\frac{1}{6}\right)$; г) $\arccos\frac{1}{6}$. **7.029.** $A(2;\ 3;\ 4)$; $B(-3;\ 2;\ -5)$; $C(0;\ -1;\ 1)$. **7.030.** $\overrightarrow{OA}(-2;\ 2;\ 0)$; $\overrightarrow{OB}(4;\ -4;\ 3)$; $\overrightarrow{OC}(7;\ 0;\ -9)$; $\overrightarrow{AB}(6;\ -6;\ 3)$; $\overrightarrow{BC}(3;\ 4;\ -12)$. **7.031.** $(-4;\ 0;\ -10)$. **7.032.** $(-4;\ 3;\ 3)$. **7.033.** $(8;\ 1;\ 6)$. **7.034.** $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$; $\overrightarrow{BC} = -5\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$; $\overrightarrow{AC} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\left(0;\ \frac{13}{3};\ 2\right)$. **7.036.** *Указание. Исследуйте, коллинеарны ли векторы* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AC}$. **7.037.** $C(1;\ -3;\ 0)$; точка C лежит между A и B. **7.038.** Нет. **7.039.** $(0;\ 6{,}5;\ 5)$. **7.040.** $(-2{,}5;\ -2{,}5;\ 0{,}5)$, $\left(\frac{5}{3};\ 0;\ \frac{14}{3}\right)$, $(2{,}5;\ 0{,}5;\ 5{,}5)$, $\left(\frac{25}{6};\ \frac{3}{2};\ \frac{43}{6}\right)$. **7.04 .** $(2;\ 4;\ 3)$. **7.042.** а) Да; б) нет; в) да. *Указание. Проверьте компланарность векторов* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *и* $\overrightarrow{AE}$. **7.044.** $(8;\ 8;\ 8)$, $(8;\ 8;\ -8)$, $(-8;\ 8;\ 8)$, $(-8;\ 8;\ -8)$, $(-8;\ -8;\ 8)$, $(-8;\ -8;\ -8)$, $(8;\ -8;\ 8)$, $(8;\ -8;\ -8)$. **7.045.** а) На координатной оси Oxy, Oyz или Oxz; б) на оси Ox, Oy или Oz. **7.047.** $B(5;\ 3;\ -3)$. **7.048.** $\left(3\frac{1}{3};\ 6\frac{2}{3};\ 8\right)$. **7.050.** а) $(-1;\ 2{,}5;\ -2)$; б) $(-8;\ 4;\ -19)$. **7.051.** $\sqrt{2}$; $\frac{7\sqrt{2}}{3}$. **7.052.** $(0{,}5;\ 0;\ 0)$. **7.053.** $(1;\ -3;\ 3)$. **7.054.** а) Правильный; б) прямоугольный. **7.055.** 120°; 30°; 30°; $2\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})$; $2\sqrt{3}$. **7.056.** $(1;\ 1;\ 0)$, $(2;\ 1;\ 0)$, $(2;\ 2;\ 0)$, $(1;\ 2;\ 0)$ или $(1;\ 1;\ 2)$, $(2;\ 1;\ 2)$, $(2;\ 2;\ 2)$, $(1;\ 2;\ 2)$. **7.057.** а) *Указание. Возможны 4 случая расположения тетраэдра относительно системы координат. В одном из них* $B(0;\ \sqrt{3};\ 0)$, $P\left(0;\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. **7.058.** $(-1;\ 3;\ 0)$, $(-1;\ 0;\ 8)$, $(0;\ 3;\ 8)$, $(-1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 3;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 8)$; этот многогранник — прямоугольный параллелепипед; $V = 24$; $S = 70$. **7.059.** $(0;\ 2;\ 8)$ или $(0;\ 3;\ 9)$. **7.060.** в) $m = 1$; $n = -1$. **7.061.** $(-2;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 4;\ 0)$, $(0;\ 0;\ \sqrt{3})$. **7.062.** $(0;\ 0;\ -3)$. **7.064.** Трапеция. **7.065.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **7.066.** *Указание. Рассмотрите 4 случая расположения тетраэдра относительно системы координат. В одном из случаев:* $B(2;\ 2\sqrt{3};\ 0)$, $P\left(2;\ \frac{2\sqrt{3}}{3};\ \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$;

центроиды: $\left(\frac{8}{3};\ \frac{8\sqrt{3}}{9};\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$; $\left(\frac{4}{3};\ \frac{8\sqrt{3}}{9};\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$; $\left(2;\ \frac{2\sqrt{3}}{9};\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$.
7.067. а) $(2;\ 1;\ \pm\sqrt{2})$; $(3;\ 2;\ \pm\sqrt{2})$; $(2;\ 3;\ \pm\sqrt{2})$; $(1;\ 2;\ \pm 2)$.
7.068. 1) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. **7.069.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $1:1:1$. **7.070.** $(0; 0; 5{,}5)$, $(0; 0; 5-\sqrt{17})$, $(0; 0; 5+\sqrt{17})$, $(0; 0; 4-\sqrt{19})$, $(0; 0; 4+\sqrt{19})$. **7.071.** $(4; 4; 4)$ или $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **7.072.** $(0; 0; 9{,}5)$, $(0; 0; -9{,}5)$, $(0; 0; -1)$, $(0; 0; 5)$. **7.073.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{7}+\frac{z}{5}=1$ или $\frac{x}{3}+\frac{y}{-7}+\frac{z}{5}=1$. **7.074.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=16$. **7.075.** $(x-2)^2+y^2+(z+3)^2=13$. **7.076.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=41$. **7.077.** Точки A, B, E. **7.078.** а) A; б) B, C, O; в) B и C, B и O, O и C. **7.080.** $M_x(2{,}5; 0; 0)$, $M_y\left(0; \frac{5}{3}; 0\right)$, $M_z(0; 0; -5)$. **7.081.** а) $x-z=0$; в) $x+2y-7z=0$. **7.082.** $2x-3y-5z+30=0$. **7.083.** а) $3x-4y+5z+4=0$; б) $2x+3y-4z=0$; в) $5x+y-4z+7=0$. **7.084.** а) $x-3=0$; б) $y-3=0$; в) $z-3=0$; г) $z+4=0$; д) $x+z-3=0$. **7.086.** $3x+4y-3z-14=0$. **7.087.** $2x-3y+z-13=0$. **7.088.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{-2}=1$. **7.089.** $3x+y-z-2=0$. **7.090.** а) $z=1$; б) $x+1=0$; в) $y-2=0$; г) $2x-y+3z+1=0$. **7.091.** $(2{,}5;\ 0;\ 0)$; $(0;\ -5;\ 0)$; $(0;\ 0;\ 2{,}5)$; $\frac{x}{2{,}5}+\frac{y}{-5}+\frac{z}{2{,}5}=1$. **7.093.** а) $x+y+z-3=0$; б) $x+y+z-2=0$; в) $15x+10y-6z-60=0$. **7.094.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$ и $x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=3$. **7.095.** в) $(2; -3; 5)$; $\sqrt{3}$; г) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$; $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **7.096.** 2) а) $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=16$. **7.097.** а) $x=0$; б) $y=3$; в) $x=0$; г) $y+5z=0$; д) $3x+3y+2z-8=0$. **7.098.** Совокупность точек координатных плоскостей. **7.099.** Совокупность точек бесконечной цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси аппликат; сечением этой поверхности плоскостью Oxy является квадрат (как замкнутая ломаная) с вершинами $(\pm 1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ \pm 1;\ 0)$. **7.100.** Совокупность точек двух пересекающихся плоскостей $x-y+2z=0$ и $x+y-2z=0$. **7.101.** $x-6y+16z-77=0$. **7.102.** $M_0\left(\frac{7}{19};\ \frac{20}{19};\ \frac{11}{19}\right)$. **7.103.** $\arccos\frac{34}{39}$. **7.104.** $\arccos\frac{1}{3}$. **7.105.** а) $(3-\sqrt{2};\ 3-\sqrt{2};\ 0)$;

б) $(3+\sqrt{2};\ 3+\sqrt{2};\ 0)$. **7.106.** Если $a<-5$ — пустое множество; если $a=-5$ — точка $(-2;\ 1;\ 0)$; если $a>-5$ — сфера радиуса $\sqrt{a+5}$ с центром $(-2;\ 1;\ 0)$. **7.107.** $25\frac{11}{13}\pi$. **7.108.** $2x+4y+4z=9$. **7.109.** $x+y-2z=0$. **7.110.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$ или $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=54$. **7.111.** $x^2+y^2+z^2=1$; $x^2+y^2+z^2=9$. **7.112.** Сфера радиуса $\sqrt{26}$ с центром $(2;\ -1;\ 3)$; точки A и B — концы диаметра сферы — исключены. **7.113.** Две сферы: $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=1$ и $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=25$. **7.116.** $\left(\frac{2}{7};\ \frac{2}{7};\ \frac{2}{7}\right)$; $\left(\frac{2}{9};\ \frac{2}{9};\ -\frac{2}{9}\right)$, $(2;\ -2;\ 2)$, $\left(\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$. **7.117.** $x+z-6=0$. **7.118.** $7x+19y+5z-104=0$. **7.119.** Поверхность октаэдра с вершинами $(\pm1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ \pm1;\ 0)$, $(0;\ 0;\ \pm1)$. **7.120.** Поверхность шестигранного угла с вершиной в начале координат. Каждое ребро угла находится в соответствующем октанте, за исключением двух октантов со всеми положительными или всеми отрицательными координатами. **7.121.** Поверхность октаэдра с вершинами $(\pm4;\ 0;\ 0)$, $(0;\ \pm4;\ 0)$, $(0;\ 0;\ \pm4)$. **7.122.** $2x+2y+2z-15=0$. **7.123.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{35}}$; $\arccos\frac{\sqrt{35}}{7}$; $\arccos\frac{3}{\sqrt{35}}$. **7.125.** $5x-3y+z=0$. **7.126.** Если $a\in(-2;\ 2)$ — пустое множество; если $a=-2$ — точка $(2;\ 0;\ 2)$; если $a=2$ — точка $(-2;\ 0;\ 2)$; если $a\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$ — сфера радиуса $\sqrt{a^2-4}$ с центром $(-a;\ 0;\ 2)$. **7.127.** $23{,}04\pi$. **7.128.** $6x-8y-47=0$. **7.129.** $x+2y+2z-11=0$. **7.130.** $(x-5)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ или $(x-5)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=48$. **7.131.** Множество всех внутренних точек шара радиуса $\sqrt{6}$ с центром $(2;\ 1;\ 1)$, за исключением точек диаметра AC. **7.132.** Все точки $K(x;\ y;\ z)$, лежащие вне сферы $x^2+y^2+(z-2)^2=9$, за исключением тех из них, которые лежат на прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}$, содержащей точки M и N. **7.133.** $3x-y+2z-5=0$. **7.134.** б) $x-y=0$; в) $x+y+z-6=0$. **7.135.** $1:1:1$. **7.137.** а) $(3;\ -3;\ 3)$ и $(-3;\ 3;\ -3)$; б) $\left(-\frac{5}{3};\ \frac{5}{3};\ -\frac{5}{3}\right)$; $(3;\ -3;\ 3)$. **7.138.** а) $(1;\ 1;\ 1)$; б) $(5;\ 5;\ 5)$; в) $(3;\ 3;\ 3-2\sqrt{3})$, $(3;\ 3-2\sqrt{3};\ 3)$, $(3-2\sqrt{3};\ 3;\ 3)$; г) $(3;\ 3;\ 3+2\sqrt{3})$, $(3;\ 3+2\sqrt{3};\ 3)$, $(3+2\sqrt{3};\ 3;\ 3)$; д) $(3;\ 3-\sqrt{6};\ 3-\sqrt{6})$, $(3-\sqrt{6};\ 3;\ 3-\sqrt{6})$, $(3-\sqrt{6};\ 3-\sqrt{6};\ 3)$; е) $(3;\ 3+\sqrt{6};\ 3+\sqrt{6})$, $(3+\sqrt{6};\ 3;\ 3+\sqrt{6})$, $(3+\sqrt{6};\ 3+\sqrt{6};\ 3)$;

ж) $(3;\ 3;\ 3+2\sqrt{3})$; з) $(3;\ 3;\ 3-2\sqrt{3})$. **7.142.** Параллельны. **7.144.** $(-13; -4; -20)$. **7.145.** $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{39}}$. **7.146.** а) $90°$; б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$. **7.147.** Точки M и K принадлежат прямой, а точка N — нет. **7.148.** $\alpha = -2$; $\beta = 0$. **7.149.**

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{11}{8} - \frac{1}{8}t, \\ z = t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{11}{3} - \frac{1}{3}t, \\ y = 0, \qquad\qquad t \in R. \\ z = t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{11}{3} - \frac{8}{3}t, \\ y = t, \\ z = 0. \end{cases}$$

7.150.

$$\begin{cases} x = -8 + 9t, \\ y = 1 - 6t, \quad t \in R; \quad \left(0; -\frac{13}{3}; -\frac{5}{9}\right), \left(-\frac{13}{2}; 0; \frac{7}{3}\right), \left(-\frac{5}{4}; -\frac{7}{2}; 0\right). \\ z = 3 - 4t; \end{cases}$$

$\left(0; -\frac{13}{3}; -\frac{5}{9}\right), \left(-\frac{13}{2}; 0; \frac{7}{3}\right), \left(-\frac{5}{4}; -\frac{7}{2}; 0\right).$

7.151.

$$\begin{cases} x = -t, \\ y = 4t, \quad t \in R. \\ z = 4t; \end{cases}$$

7.152.

$$\begin{cases} x = -t, \\ y = 2t, \quad t \in R. \\ z = 7t; \end{cases}$$

7.153. $\alpha + \beta = -5$. **7.154.** $\arccos(\sqrt{0,7})$. **7.155.** $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$. **7.156.** Прямые совпадают. **7.157.** Прямые пересекаются в точке $A(5;\ 2;\ 9)$. **7.158.** 2) а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **7.159.** Прямая лежит в плоскости. **7.160.** Прямая параллельна плоскости xOz и пересекает плоскость xOy в точке $(-7;\ 1;\ 0)$, а плоскость yOz — в точке $\left(0; 1; 4\frac{2}{3}\right)$.

7.161.

$$\begin{cases} x = 5t, \\ y = 3 + 2t, \quad t \in R; \ (0,5;\ 3,2;\ 3,9). \\ z = 4 - t, \end{cases}$$

7.162. $\arcsin \frac{10}{\sqrt{154}}$. **7.163.** $x - 2y - 3z = 0$; $\left(3\frac{6}{7};\ -1\frac{5}{7};\ 2\frac{3}{7}\right)$.
7.164. 1 : 3. **7.165.** Прямая и сфера пересекаются в точках $A(4; 0; 3)$ и $B\left(\frac{1}{7}; 2\frac{4}{7}; 4\frac{2}{7}\right)$.

7.167. $\begin{cases} x = 2, \\ y = t, t \in R. \\ z = 0; \end{cases}$ **7.168.** $\begin{cases} x = -3 - 4t, \\ y = 4 + 3t, t \in R. \\ z = t; \end{cases}$

7.169. Ox и AB пересекаются; Oy и AB, Oz и AB скрещиваются.

7.170. $\begin{cases} x = 1 - 5t, \\ y = 3, t \in R. \\ z = -2 + 2t; \end{cases}$ **7.171.** $\begin{cases} x = -1, \\ y = 2 + 3t, t \in R. \\ z = 3 - 7t; \end{cases}$

7.172. 0. **7.173.** Прямые параллельны. **7.174.** 1) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$; 2) б) $\left(\frac{2}{3};\ 1;\ \frac{5}{3}\right)$; в) 1 : 2; г) $\cos\varphi = \frac{6}{19}$, $\cos\psi = \frac{25}{19}$; д) $\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$; е) $\frac{19}{\sqrt{13}}$. **7.175.** $x = 1 + 5t$, $y = 1 - t$, $z = 1 - 7t$. **7.176.** $\frac{5\sqrt{30}}{6}$.
7.177. Прямая параллельна плоскости. **7.178.** Прямая пересекает плоскость в точке $\left(-13;\ 11\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

7.179. $\begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = 8 - 7t, t \in R. \\ z = 1 + t; \end{cases}$

7.180. Прямая и сфера касаются в точке (1; 5; 12). **7.181.** Прямая и сфера не имеют общих точек. **7.184.** $\frac{27}{13}$. **7.185.** $x + 2y + 2z = 0$.
7.186. $z = 0$ и $3x + 4z = 0$. **7.187.** $2x - 3y + z + 2 = 0$. **7.188.** Две плоскости $x + 2y - 2z - 11 = 0$ и $x + 2y - 2z + 1 = 0$. **7.189.** Две плоскости $7x + 9y + 8z + 4 = 0$ и $x - 15y + 16z + 6 = 0$. **7.190.** 4 : 25. **7.191.** $\frac{10}{\sqrt{38}}$.

7.192. $\frac{38}{3\sqrt{29}}$.

7.193. $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t, t \in R. \\ z = t; \end{cases}$

7.194. (4; –1; –3); $\sqrt{26}$. **7.195.** (1; 2; 6), (1; 2; 4), (1; 0; 6), (1; 0; 4), (–1; 2; 6), (–1; 2; 4), (–1; 0; 6), (–1; 0; 4). **7.196.** Множество всех точек сферы радиуса $\sqrt{15{,}25}$ с центром (2; 3; 1,5). **7.197.** Множество всех точек сферы радиуса $\sqrt{6}$ с центром $\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{7}{3}\right)$. **7.198.** $12a^2$, где a — ребро куба. **7.199.** $8a^2$, где a — ребро куба. **7.201.** Множество всех точек сферы радиуса 0,5 с центром в центре призмы. **7.202.** Множество всех точек сферы радиуса 2 с центром в начале координат. **7.203.** Множество всех точек сферы радиуса 2 с центром (0; 2; –1). **7.204.** $8x + y = 0$. **7.205.** $5x - 3y - 8z = 0$. **7.206.** Да; $x + 2y + 13z - 22 = 0$. **7.207.** Да; $x + z - 3 = 0$. **7.208.** 8. **7.209.** Такая точка единственная: (0; 0; –6,5). **7.210.** $4x + 3y + 12z - 25 = 0$. **7.211.** Такая сфера единственная: $x^2 + y^2 + z^2 = 30$. **7.212.** Таких прямых две:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = -t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = t, \\ y = -11t,\ t \in R. \\ z = 5t; \end{cases}$$

7.213.

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 1 + 3u, \\ z = 5u; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - 2v, \\ y = 0,\ t,\ u,\ v \in R. \\ z = 5v; \end{cases}$$

7.214. а) $\left(\frac{19}{\sqrt{498}};\ \frac{11}{\sqrt{498}};\ \frac{4}{\sqrt{498}}\right)$; б) $\left(-\frac{19}{\sqrt{498}};\ -\frac{11}{\sqrt{498}};\ -\frac{4}{\sqrt{498}}\right)$. **7.215.** $x = y = z$, $x = y = -z$, $x = -y = z$, $x = -y = -z$.

7.216.

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 22{,}5 - 3t,\ t \in R. \\ z = -37 + 8t; \end{cases}$$

7.217. Сфера, описанная около куба. **7.218.** Сфера с радиусом $\frac{15\sqrt{5}}{16}$ и центром (0; 2,125; –0,5625).

Д2. Материалы для повторения и углубления планиметрии

107. 5,8 см. **109.** $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$. **110.** 6. **111.** 5,6. **112.** 4 : 3. **113.** $\frac{8\sqrt{14}}{15}$. **114.** $5\sqrt{2}$ см. **115.** 1. **116.** $\frac{c \cdot \sin 2\beta}{2\sin(\beta + 45°)}$. **117.** $\frac{25}{2}$ и $\frac{9}{1}$. **118.** 16. **119.** 7. **120.** 52. **121.** 10. **122.** $2\frac{166}{245}$. **123.** 7. **124.** $p - a$; $p - b$; $p - c$, *где p — полупериметр треугольника.* **126.** 56 см. **127.** $\frac{2S}{3r}$. **128.** $41\frac{2}{3}$ см. **129.** 2,5; 6; 6,5. **130.** $\frac{25}{8}$ см; 4 см; $\frac{144}{25}$ см. **131.** $\frac{|a - b|}{2}$.

134. 90 см. **135.** 12 см; $\frac{35\sqrt{6}}{8}$ см. **137.** 4,8 см. *Указание. Треугольники ABC и DBE подобны.* **138.** $\frac{6}{5}a$. **139.** 7,5 см. **140.** 7,5 см. **141.** 13 см. **142.** $\frac{\sqrt{13}}{2}R$. **143.** 5 см. **144.** $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. *Указание. Воспользуйтесь подобием треугольников.* **145.** $r + r_1 + r_2$. *Указание. Воспользуйтесь соотношением между катетами, гипотенузой и радиусом вписанной в прямоугольный треугольник окружности.* **146.** $\frac{4\sqrt{46}}{3\sqrt{15}}$. *Указание. Воспользуйтесь теоремой о касательной к окружности и секущей.* **147.** $5\frac{5}{8}$. **148.** 69°; 48° и 63°. **149.** 44°; 80° и 56°. **150.** 8. **151.** 2. **152.** $\sqrt{2}$. **153.** $3\sqrt{2}$. **154.** 18. **155.** 157°. **156.** 25π. **157.** 84 см². **158.** 192 : 49. **159.** 15 дм; 8 дм. **160.** $\frac{49}{\sqrt{3}}$. **161.** 30 : 7. **162.** 45°; 45°; 90°. *Указание. Воспользуйтесь неравенством* $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} >$ > 2. **163.** $\sqrt{\frac{8c^2 + 3a^2}{35}}$. **164.** 7. **165.** $\frac{a + b - \sqrt{a^2 + ab + b^2}}{2}$. **166.** 6. **167.** $10\frac{2}{3}$. **168.** $\sqrt{10}$. **170.** $\cos C$. **171.** $S \cdot \cos^2 \beta$. **172.** а) $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$; б) $2\sqrt{S_1 \cdot S_2}$. **173.** $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. **174.** 34 см и 56 см. **175.** 70 см; 75 см. **176.** $a - b$. **177.** $\sqrt{b^2 - a^2}$. **178.** 1,25. **179.** 4 см. **180.** $3\sqrt{3}$. **181.** $2\arcsin\frac{5}{\sqrt{109}}$. **182.** 20 см². **183.** $\frac{R^2\sqrt{3}(6\sqrt{3} - 4)}{3}$. **184.** $\sqrt{13}$. **185.** $\sqrt{\frac{a^2 - 4a + 16}{3}}$. **186.** 15 см. **187.** 7,2; 7,5. **188.** 10. **189.** $a \cdot b$. **190.** 1; $\sqrt{3}$. **191.** 5 дм; 13 дм. **192.** 29,4 см; 12,5 см; 14 см; 16,9 см. **193.** 192 см². **194.** $\sqrt{\frac{7}{3}}$ см. **195.** $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ см; $\frac{18\sqrt{10}}{5}$ см; $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ см; $3\sqrt{10}$ см. **196.** $\frac{h\sqrt{3}}{3}$. **198.** 180 см². **199.** 30°; 150°. **201.** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$. **202.** 1. **203.** 3. **204.** 2. **205.** 37. **206.** $\frac{a \cdot b}{(a + b)^2}$. **207.** 168. **208.** 3. **209.** 3. **210.** 10 см². **211.** $\frac{13\sqrt{3}}{3}$. *Указание. Если* $DC = a$, $\angle ACM = \alpha$, *то*

$a = 4 : \cos\alpha = 3 : \cos(60° - \alpha)$. **212.** $\sqrt{P \cdot Q}$. **214.** $2\sqrt{5}$. **215.** *Указание. Средние линии треугольника разбивают его на четыре равновеликих треугольника.* **216.** $\frac{a^2}{2}$. **217.** $\sqrt{7}$. **218.** 8 см; 9 см. **219.** $\frac{3\pi}{7}$. **220.** 200. **221.** $\sqrt{7}$. **222.** $a\sqrt{\frac{R_1}{R_1 - R_2}}$. **223.** 17 см. **224.** *Указание. Трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной.* **225.** 3 см. **226.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr - R^2 - r^2}{3}}$. **227.** 30. **228.** а) $2\sqrt{R \cdot r}$; б) $\sqrt{R \cdot r}$; в) 90°. **229.** $\frac{R \cdot r}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$ и $\frac{R \cdot r}{(\sqrt{R} - \sqrt{r})^2}$. **230.** $6 + 2\sqrt{2}$. **231.** 30°. **232.** $4\frac{3}{8}$. **233.** $7 + 4\sqrt{3}$. **234.** $\sqrt{21}$. **235.** 48. **236.** $5S$. **237.** Полоса, заключенная между двумя параллельными прямыми, расстояние между которыми равно $2p$, а прямая l делит их общий перпендикуляр пополам. **238.** а) Окружность с центром A и радиусом AB; б) окружность с радиусом, равным отрезку AB, и с центром в точке A_1, симметричной точке A относительно точки B. **239.** а) Серединный перпендикуляр к отрезку AB; б) прямая, перпендикулярная прямой AB и проходящая через точку, симметричную середине отрезка AB относительно точки B. **240.** а) Прямая, проходящая через точку C параллельно прямой AB; б) отрезок BD такой, что $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$; в) параллелограмм $ABDC$, где $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. **241.** Да. *Указание. Покажите, что диагонали данного четырехугольника, пересекаясь, делятся пополам.* **243.** $BM : MK = 5 : 3$; $AM : MP = 3 : 1$. **244.** $BM : MH = 5 : 4$; $AM : MK = 2 : 1$. **245.** 6 : 11. **246.** $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 50$. **247.** 10. *Указание. Возведите в квадрат векторное равенство* $\overrightarrow{MC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$, *где M — точка пересечения медиан треугольника ABC, C_1 — середина стороны AB.* **248.** 6. *Указание. Используйте равенство* $\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$. **249.** $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 68$, кроме точек (3; 5) и (7; –11). **250.** $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 17$. **251.** Окружность с центром (5,5; 0) и радиусом 1,5. **252.** Окружности пересекаются. **253.** $(x - 9)^2 + (y + 7)^2 = 100$ или $(x + 3)^2 + (y - 9)^2 = 100$. **254.** Две концентрические окружности с центром в начале координат и радиусами 1 и 5. **255.** $3x + 4y - 25 = 0$; $10\sqrt{3}$. **256.** 10.

Греческий алфавит			Латинский алфавит		
Α	α	альфа	A	a	а
Β	β	бета	B	b	бе
Γ	γ	гамма	C	c	це
Δ	δ	дельта	D	d	де
Ε	ε	эпсилон	E	e	э
Ζ	ζ	дзета	F	f	эф
Η	η	эта	G	g	же
Θ	θ	тета	H	h	аш
Ι	ι	йота	I	i	и
Κ	æ	каппа	J	j	жи
Λ	λ	лямбда	K	k	ка
Μ	μ	мю	L	l	эль
Ν	ν	ню	M	m	эм
Ξ	ξ	кси	N	n	эн
Ο	ο	омикрон	O	o	о
Π	π	пи	P	p	пэ
Ρ	ρ	ро	Q	q	ку
Σ	σ	сигма	R	r	эр
Τ	τ	тау	S	s	эс
Υ	υ	ипсилон	T	t	тэ
Φ	φ	фи	U	u	у
Χ	χ	хи	V	v	вэ
Ψ	ψ	пси	W	w	дубль-вэ
Ω	ω	омега	X	x	икс
			Y	y	игрек
			Z	z	зет

Оглавление

Глава 6. ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ

Глава 7. КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ

ДОПОЛНЕНИЯ

Д1. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

Д2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ И УГЛУБЛЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИИ

ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное издание

Потоскуев Евгений Викторович
Звавич Леонид Исаакович

ГЕОМЕТРИЯ

10 класс

Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики

Редактор *Г. Н. Хромова*
Художественный редактор *А. А. Абрамова*
Технические редакторы *В. Ф. Козлова, Н. И. Герасимова*
Компьютерная верстка *А. В. Маркин*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.006315.08.03 от 28.08.2003.
Подписано к печати 01.03.04. Формат $60\times90^1/_{16}$.
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 13,0. Тираж 16 000 экз. Заказ № 5143 .

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».
109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазины «Переплетные птицы»:
127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1.
Тел.: (095) 912-45-76;

140408, Московская обл., г. Коломна, Голутвин,
ул. Октябрьской революции, 366/2.
Тел.: (095) 741-59-76.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в АО «Московские учебники и Картолитография».
125252, Москва, ул. Зорге, 15.